第 30卷 第 2期
2010年 6月
数学理论与应用
MATHEMATICAL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 30 No. 2
Jun. 2010

Smarandache函数与伪 Smarandache函数相关性质研究*

熊 海
(国防科技大学理学院数学与系统科学系，长沙， 410073)

摘 要 本文研究了 Smarandache函数与伪 Smarandache函数的相关性质，主要给出了伪 Smarandache函数均值的一个范围，证明了 Majumdar提出的四个猜想是正确的。
关键词 Smarandache函数 伪 Smarandache函数

On Smarandache Function and Pseudo-Smarandache Function

Xiong Hai
(Department of Mathematics and Systems Science, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper we researched some properties of Smarandache and pseudo-Smarandache functions, and give a bound of the mean value of pseudo-Smarandache function. Furthermore, we give affirmative answers to four conjectures proposed by Majumdar.
Keywords Smarandache function Pseudo-Smarandache function

1 引言

Smarandache函数是由 F. Smarandache在《Only Problems, No Solutions》一书中引进的，其定义为 $S(n)=\min\{m: n\mid m!\}$，后来人们根据 Smarandache函数定义了伪 Smarandache函数 $Z(n)=\min\left\{m: n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$，它们有许多有趣的性质，许多人曾对此进行研究。

Erdos曾经猜测对于几乎所有的 n都有 $S(n)=P(n)$，其中 $P(n)$是指 n的最大素因子函数，对于这个猜测目前所获得的最好结果是 Aleksandar Ivic[1]得到的，他证明了 $N(x)=x\exp\left\{-\sqrt{2\log x\log\log x}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\}$，这里 $N(x)$表示所有不超过 x的整数中不满足方程 $S(n)=P(n)$的整数的个数。Mark Farris和 Patrick Mitchell[2]研究了 Smarandache函

* NCET(06-09-23)及 JC08-03资助
收稿日期：2009年 12月 8日

数 $S(n)$ 在素数幂上的上下界估计,并得到了如下结果:$(p-1)\alpha\leqslant S(p^\alpha)\leqslant(p-1)(\alpha+1+\log_p\alpha)+1$; Jozsef Sandor[3] 研究了包含 Smarandache函数不等式的可解性,证明了 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$ 和 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$ 存在无穷多组解。Lu Yaming[4] 进一步证明了在等号成立下也存在无穷多组解。

关于 $S(n)$ 和 $Z(n)$ 还有许多性质尚不清楚,特别是 $Z(n)$ 由于其值的分布的不规则性使得研究起来具有很大的困难。张文鹏在[5]中提出下列问题:是否最多只有有限多个正整数 n 使得 $\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$ 为正整数;函数 $Z(n)$ 的均值是多少? A. A. K. Majumdar在[6]中提出了4个猜想:(1) $Z(n)=2n-1$ 当且仅当 $n=2^k$,其中 k 为非负整数;(2) $Z(n)=n-1$ 当且仅当 $n=p^k$,其中 p 为大于3的素数;(3)如果 n 不能表达为 $n=2^k$ 的形式,则有 $Z(n)\leqslant n-1$;(4)对任意的 n 都有 $Z(n)\neq Z(n+1)$。本文将主要研究以上问题,我们部分解决了张文鹏所提出的问题,并证明了Majumdar所提的四个猜想是正确的。

2 Smarandache函数的相关性质

引理 2.1 若 $S(n)=P(n)$,设 n 的标准分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}P^{\alpha_{r+1}}(n)$,那么必有 $\alpha_{r+1}=1$;对于 $1\leqslant k\leqslant r$,必有 $\alpha_k\leqslant P(n)-2$。

证明 若 $\alpha_{r+1}>1$,则有 $P^2(n)\mid n\mid S(n)!=P(n)!$,这与 $P(n)$ 为素数矛盾!故有 $\alpha_{r+1}=1$。

设 $n!$ 中包含素因子 p 的个数为 α,即满足 $p^\alpha\mid n!$,$p^{\alpha+1}\nmid n!$,则有 $\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$(证明参见[7]),由于有 $p_k^{\alpha_k}\mid P(n)!$,因此有 $\alpha_k\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{P(n)}{p_k^i}\right]\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(n)}{p_k^i}\leqslant\frac{P(n)}{p_k-1}$,因此当 $p_k\neq2$ 时是显然有 $\alpha_k\leqslant P(n)-2$;而当 $p_k=2$ 时,则有 t 使得 $2^t<P(n)<2^{t+1}$,此时有 $\alpha_k\leqslant\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{P(n)}{2^i}\right]\leqslant\sum_{i=1}^{t}\frac{P(n)}{2^i}=P(n)-P(n)\frac{2}{2^{t+1}}<P(n)-1$,因为 α_k 为整数因此有 $\alpha_k\leqslant P(n)-2$。

定理 2.1 令 $f(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}$,那么在 $n\leqslant x$ 的整数中除去 $N(x)$ 个整数外,$f(n)$ 均不取整数值,其中 $N(x)=x\exp\left\{-\sqrt{2\log x\log\log x}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\}$,即 $f(n)$ 在几乎所有的整数上都不取整数值。

证明 由 Aleksandar Ivic[1]的结果,我们只需证明当 $S(n)=P(n)$ 时,$f(n)$ 不为整数。

若 $S(n)=P(n)$，由引理 2.1 知，可设 n 的标准分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}P(n)$，其中 $\alpha_k\leqslant P(n)-2$，将 n 记为 $n=mP(n)$，所以此时有：

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d\mid m}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid m}\frac{1}{S(dP(n))}$$

$$=\sum_{d\mid m}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d\mid m}\frac{1}{P(n)}=\sum_{d\mid m}\frac{1}{S(d)}+\frac{\prod_{k=1}^{r}(\alpha_k+1)}{P(n)}$$

只需注意到对于 $d\mid m$，$S(d)<S(n)=P(n)$，$\alpha_k+1\leqslant P(n)-1<P(n)$，因此对于第一部分，将其通分后，其分母的素因子皆小于 $P(n)$，对于第二部分其分子的素因子也皆小于 $P(n)$，因此其肯定不是整数，因此这两部分相加不可能为整数。

3 伪 Smarandache 函数的相关性质

为了更加方便的研究 $Z(n)$，我们定义一个新的函数 $Z^*(n)=\min\{m: n\mid m(m+1)\}$，显然我们容易得到当 n 奇数时 $Z(n)=Z^*(n)$，当 n 偶数时 $Z(n)=Z^*(2n)$，因此这两个函数是密切相关的。

引理 3.1 当 $n=p^k$ 时，$Z^*(n)=n-1$；当 n 含有两个以上不同的素因子时，则必有 $Z^*(n)\leqslant\frac{n}{2}-1$。

证明 由 $Z^*(n)$ 的定义易知 $Z^*(n)\leqslant n-1$，而当 $n=p^k$ 时有 $p^k\mid Z^*(n)(Z^*(n)+1)$，故有 $p^k\mid Z^*(n)$ 或 $p^k\mid Z^*(n)+1$，此时都可得到 $Z^*(n)\geqslant p^k-1=n-1$，故此时有 $Z^*(n)=n-1$。

当 n 含有两个以上不同的素因子时，此时 n 必可分解为两个互素且大于 1 的整数的乘积，设 $n=mk$，其中 $(m,k)=1$，此时可设 k 为奇数，则必定存在且唯一存在 b，b' 属于 k 的最小非负剩余系使得 $mb\equiv-1\bmod k$，且 $mb'\equiv1\bmod k$，因此必有 $Z^*(n)\leqslant\min\{mb,mb'-1\}$，而注意到 $k\mid mb+mb'$，因此有 $k\mid b+b'$，故有 $b+b'=k$，由于 k 为奇数，故必有 $\min\{b,b'\}\leqslant\frac{(k-1)}{2}$，因此 $Z^*(n)\leqslant m\frac{k-1}{2}=\frac{n}{2}-\frac{m}{2}\leqslant\frac{n}{2}-1$。

定理 3.1 (i) $Z(n)=2n-1$ 当且仅当 $n=2^k$，其中 k 为非负整数；(ii) $Z(n)=n-1$ 当且仅当 $n=p^k$，其中 p 为大于 2 的素数；(iii) 如果 n 不能表达为 $n=2^k$ 的形式，则有 $Z(n)\leqslant n-1$。

证明 (i) 当 $n=2^k$ 时 (仅考虑 k 为正整数，$k=0$ 是显然的)，此时有 $Z(n)=Z^*(2n)$，故由引理 3.1 可知 $Z(n)=2n-1$；若 $Z(n)=2n-1$，必有 n 为偶数，否则 $Z(n)=Z^*(n)\leqslant$

$n-1$，假设 $n\neq 2^k$，故 $2n$至少还含有一个奇素因子，由引理 3.1可得 $Z(n)=Z^*(2n)\leqslant \frac{2n}{2}-1=n-1$，矛盾，故 $n=2^k$。

（ii）当 $n=p^k$，且 p为大于 2的素数时，此时有 $Z(n)=Z^*(n)$，由引理 3.1可得 $Z(n)=n-1$；若 $Z(n)=n-1$，显然 n不可能是偶数，假设 $n\neq p^k$，则 n至少含有两个奇素因子，由引理 3.1可得 $Z(n)=Z^*(n)\leqslant \frac{n}{2}-1$，矛盾，故有 $n=p^k$，且 p为大于 2的素数。

（iii）若 n不能表达为 $n=2^k$的形式，则必有 n为奇数，此时有 $Z(n)=Z^*(n)\leqslant n-1$，或则 n为偶数且至少含有一个奇素因子，由引理 3.1可知此时有 $Z(n)=Z^*(2n)\leqslant\frac{2n}{2}-1=n-1$。

定理 3.2 对任意的 n都有 $Z(n)\neq Z(n+1)$。

证明 假设有 n使得 $Z(n)=Z(n+1)=m$，则存在 k，k'使得 $nk=(n+1)k'=\frac{m(m+1)}{2}$，由于 $(n, n+1)=1$，因此有 $n+1\mid k$，$n\mid k'$，因此有 $n+1\leqslant k$，$n\leqslant k'$，故可得知 $\frac{m(m+1)}{2}\geqslant n(n+1)$，故有 $m>n+1$，由定理 3.1可知则必有 $n=2^t$，$n+1=2^{t'}$，故只可能是 $n=1$，此时显然有 $Z(1)\neq Z(2)$。

定理 3.3 $x^2\sum_{i=1}^{J}\frac{a_j}{\log^j x}+O\left(\frac{x^2}{\log^{J+1}x}\right)\leqslant\sum_{n\leqslant x}Z(n)\leqslant\frac{3}{8}x^2+O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$，其中 $a_j=\frac{\zeta(j+1)}{2}$。

证明 首先证明不等式右半部分：由定理 3.1可知，当 $n=2^k$时，$Z(n)=2n-1$，当 $n=p^k$时，$Z(n)=p^k-1$，当 n为含有奇素数因子的偶数时，$Z(n)\leqslant n-1$，当 n为含有 2个以上的奇素数因子的奇数时有 $Z(n)\leqslant\frac{(n-1)}{2}$，因此可得：

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}Z(n)&=\sum_{k\leqslant\left[\frac{x}{2}\right]}Z(2k)+\sum_{k\leqslant\left[\frac{x}{2}\right]}Z(2k+1)+O(x)\\&\leqslant\sum_{k\leqslant\left[\frac{x}{2}\right]}2k-1+\sum_{k\leqslant\left[\frac{x}{2}\right]}k+\sum_{p\leqslant x}\frac{p-1}{2}+\sum_{k\leqslant\ln x}2^k+O(x)\\&=3\sum_{k\leqslant\left[\frac{x}{2}\right]}k+\sum_{p\leqslant x}\frac{p-1}{2}+\sum_{k\leqslant\ln x}2^k+O(x)\\&=\frac{3}{8}x^2+O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)。\end{aligned}$$

下面证明左半部分：因为 $P(n)\mid n\mid\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}$，故有 $P(n)\mid Z(n)(Z(n)+1)$，所

以 $Z(n)\geqslant P(n)-1$，因此可得：

$$\sum_{n\leqslant x} Z(n)\geqslant \sum_{n\leqslant x}(P(n)-1)=\sum_{n\leqslant x} P(n)+O(x)=x^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j}{\log^j x}+O\left(\frac{x^2}{\log^{J+1} x}\right)$$

最后一步参见[1]。

参考文献

[1] Aleksandar Ivic. On a problem of erdos involving the largest prime factor of n[J]. M. Math., 2005, 145: 35—46.

[2] Faris Mark, Mitchell Patrick. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 81—86.

[3] Sandor J. On a dual of the Pseudo—Smarandache function[J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 16—23.

[4] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2: 76—79.

[5] 张文鹏. 关于 F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报, 2008, 38: 173—175.

[6] A. A. K. Majumdar. A note on the Pseudo—Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2: 1—25.

[7] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.