DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2013.08.027

第38卷 第8期 西南师范大学学报(自然科学版) 2013年8月
Vol. 38 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2013

文章编号:1000-5471(2013)08-0010-05

Smarandache 函数在数列 a^p+b^p 上的一个新的下界估计①

石 鹏， 刘 卓

西北大学 数学系，西安 710127

摘要：利用初等方法以及同余技巧研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 在数列 a^p+b^p 上的下界估计问题，给出了一个较强的下界估计．证明了：对任意两个不同的正整数 a 及 b，有估计式 $S(a^p+b^p)\geqslant 10p+1$，其中 $p\geqslant 17$ 为素数．

关 键 词：初等方法；同余技巧；Smarandache 函数；下界估计

中图分类号：O156.4 文献标志码：A

对任意正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为使得 $n\mid m!$ 的最小的正整数 m，即

$$S(n)=\min\{m: m\in\mathsf{N}_+;\ n\mid m!\}$$

从 $S(n)$ 的定义容易推出：如果 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$．

关于 $S(n)$ 的各种性质，许多学者进行了研究，获得了不少有意义的结果．文献[1]研究了 $S(2^{p-1}(2^p-1))$ 的下界估计问题，证明了：对任意奇素数 p，有估计式

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 2p+1$$

文献[2]研究了 $S(2^p+1)$ 的下界估计，证明了：当 $p\geqslant 7$ 时，有估计式

$$S(2^p+1)\geqslant 6p+1$$

文献[3]将文献[2]中的结果作了改进，证明了：对任意素数 $p\geqslant 17$，有估计式

$$S(2^p-1)\geqslant 10p+1 \qquad S(2^p+1)\geqslant 10p+1$$

此外，文献[4]研究了 $S(n)$ 在数列 a^p+b^p 上的下界估计问题，证明了：$S(a^p+b^p)\geqslant 8p+1$，其中 a,b 为任意的正整数，$p\geqslant 17$ 为素数．

本文受到文献[3－4]的启发，进一步研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 在特殊数列 a^p+b^p 上的下界估计问题，并得到一个较强的下界估计．本文的主要结果是：

定理1 设 $p\geqslant 17$ 为素数．对于任意两个不同的正整数 a 及 b，有估计式

$$S(a^p+b^p)\geqslant 10p+1$$

显然定理1是文献[2]的结论的推广和延伸．特别地，当 $a=2$，$b=1$ 时，我们可以立即推出文献[4]中关于下界的估计 $S(2^p+1)\geqslant 10p+1$．

引理1[4] 设 p 为奇素数，对任意的整数 a 及 b，且 $a+b\neq 0$，我们有 $\left(\dfrac{a^p+b^p}{a+b},\ a+b\right)=1,p$．

引理2[5] 对任意素数 p，正整数 n 及 α，有：

(1°) 当 $p\mid n$ 时，$S(n)\geqslant S(p)=p$；

(2°) 当 $\alpha\leqslant p$ 时，$S(p^\alpha)=\alpha\cdot p$；当 $\alpha>p\geqslant t$ 时，$S(p^\alpha)\geqslant S(p^t)\geqslant p\cdot t$．

① 收稿日期：2011-12-07
作者简介：石 鹏(1985-)，男，陕西旬阳人，硕士研究生，主要从事数论的研究．

引理 3　设 a,b 为正整数，且 $a+b$ 为奇数，则对任意素数 $p\geqslant 3$ 有不等式：

$$a^p+b^p\geqslant\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^p+\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^p$$

证　由于正整数 a,b 的和 $a+b$ 为奇数，则 $a\neq b$，不妨设 $a>b$，则有 $a\geqslant b+1$，即 $a-b-1\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}&a^p+b^p=\\&\left(\frac{a+b+1}{2}+\frac{a-b-1}{2}\right)^p+\left(\frac{a+b-1}{2}-\frac{a-b-1}{2}\right)^p=\\&\sum_{i=0}^{p}C_p^i\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{p-i}\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^i+\sum_{j=0}^{p}C_p^j\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^{p-j}\left(-\frac{a-b-1}{2}\right)^j=\\&\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^p+\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^p+\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}C_p^{2i}\left[\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^{p-2i}+\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^{p-2i}\right]\cdot\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^{2i}+\\&\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}C_p^{2j+1}\left[\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^{p-2j-1}-\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^{p-2j-1}\right]\cdot\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^{2j+1}\geqslant\\&\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^p+\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^p\end{aligned}$$

引理 3 得证.

定理 1 的证明　因为 a 和 b 为不同的整数，设$(a,b)=d$，则存在 a_1 及 b_1，使得 $a=d\times a_1$，$b=d\times b_1$ 且$(a_1,b_1)=1$，从而有 $a^p+b^p=d^p(a_1{}^p+b_1{}^p)$，再由 Smarandache 函数的性质知

$$S(a^p+b^p)=S(d^p(a_1^p+b_1^p))\geqslant S(a_1^p+b_1^p)\tag{1}$$

由(1) 式，不失一般性，我们可以假定定理 1 中的 a,b 满足$(a,b)=1$ 且 $a\cdot b>1$.

首先，我们证明 a^p+b^p 不可能为 p 的方幂，若不然，设 $a^p+b^p=p^\alpha$，当 $\alpha=2$ 时，有 $a^p+b^p\geqslant 2^p+1>2^p>p^2$，所以 $\alpha\geqslant 3$. 由引理 1 不难推出 $a+b=p^k\cdot u$，其中 $k\in\mathrm{N}_+$，$(p,u)=1$. 因为 $a+b\mid a^p+b^p$，从而 $u=1$. 当$\left(\dfrac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)=(p^{\alpha-k},p^k)=1$ 时，有 $k=0$ 或 $k=\alpha$，即 $a+b=1$ 或 $a+b=p^\alpha$，这与$(a,b)=1$ 且 $a\cdot b>1$ 相矛盾. 而当 $k=\alpha-1$ 时，有 $a+b=p^{\alpha-1}$，从而有 $p(a+b)=p^\alpha$，所以有 $a^p+b^p=p\cdot a+b\cdot p$. 另一方面，$a$ 与 b 中至少有一个不小于 2，不妨设 $a\geqslant 2$，由 $p\geqslant 17$ 为素数知$a^p>p\cdot a$，所以有 $a^p+b^p>a\cdot p+b\cdot p$，矛盾，故 $1\leqslant k\leqslant\alpha-2$，因此

$$p^\alpha=a^p+b^p=a^p+(p^k-a)^p=\sum_{i=0}^{p-1}C_p^ip^{k(p-i)}(-1)^ia^i=p^{k+1}a^{p-1}+\sum_{i=0}^{p-2}C_p^ip^{k(p-i)}(-1)^ia^i$$

或者

$$p^\alpha-\sum_{i=0}^{p-2}C_p^ip^{k(p-i)}(-1)^ia^i=p^{k+1}a^{p-1}\tag{2}$$

由于 $\alpha\geqslant k+2$，则(2) 式左边能被 p^{k+2} 整除，但右边不能被 p^{k+2} 整除，矛盾. 所以 a^p+b^p 不可能为 p 的方幂. 于是存在素数 $q\neq p$，且 $q\mid\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$，即 $a^p+b^p\equiv 0\pmod q$，即有$(a\cdot\bar{b})^p\equiv -1\pmod q$，从而有

$$(a\cdot\bar{b})^{2p}\equiv 1\pmod q\tag{3}$$

设 m 是$(a\cdot\bar{b})$ 模 q 的指标，由(3) 式及指标的性质(参考文献[6-7]) 知 $m\mid 2p$，所以 m 的取值最多有 4 种可能：$m=1,2,p,2p$. 显然 $m=1,2,p$ 时不可能. 因为当 $m=1$ 时，由$(a\cdot\bar{b})\equiv 1\pmod q$ 知 $a\equiv b\pmod q$，所以有 $b=a+hq$，故$(a,b)=(a,a+hq)=(a,hq)=1$，显然有 $q\nmid a$. 而另一方面，由

$$a^p+b^p=a^p+(a+hq)^p=2a^p+\sum_{i=1}^{p-1}a^ih^{p-i}q^{p-i}$$

可知 $q\nmid a^p+b^p$，这与 $q\mid\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$ 矛盾. 当 $m=2$ 时，有 $a\cdot\bar{b}\equiv -1\pmod q$，即 $a+b\equiv 0\pmod q$，再由 $q\mid\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$ 知 $q\mid\left(\dfrac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)$，即有 $q\mid p$，这与 p,q 为不同素数矛盾. 当 $m=p$ 时，有$(a\cdot\bar{b})^p\equiv$

$1 \pmod q$，所以 $-1 \equiv 1 \pmod q$，矛盾，故 $m=2p$. 再由指标的性质知 $m \mid \phi(q)=q-1$，即 $q-1=h\cdot m=h\cdot 2p$，或者

$$q = h \cdot 2p + 1 \tag{4}$$

于是由(4)式知，a^p+b^p 可以分以下 4 种情况讨论：

情况 1　若 a^p+b^p 除 p 之外，至少含有 4 个不同的素因子，由(4)式知，至少有一个素因子 q，使得 $q=2hp+1$ 且 $h \geqslant 5$. 因为当素数 $p \geqslant 5$ 时，两个数 $2p+1$ 和 $4p+1$ 中至少有一个被 3 整除，因此它们不可能同时为素数，此时

$$S(a^p+b^p) \geqslant S(q) = q = 2hp+1 \geqslant 10p+1$$

情况 2　若 a^p+b^p 除 p 之外，仅含有 3 个不同素因子，由(4)式知，如果其中至少有一个素因子满足 $q=2hp+1$ 且 $h \geqslant 5$，那么就有 $S(a^p+b^p) \geqslant S(q)=q \geqslant 10p+1$. 如果所有的素因子中 $h \leqslant 4$，因为当 $p \geqslant 3$ 时，$4p+1$ 和 $8p+1$ 中至少有一个被 3 整除，因此 $4p+1$ 和 $8p+1$ 不可能同时为素数. 再注意到 $2p+1$ 和 $4p+1$ 不可能同时为素数，所以可设

$$a^p+b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma(8p+1)^\delta$$

此时，当 $\beta \geqslant 5$ 或者 $\gamma \geqslant 2$ 或者 $\delta \geqslant 2$ 时，$S(a^p+b^p) \geqslant 10p+1$ 显然成立. 不失一般性，可假定

$$a^p+b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1) \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant 4$$

这种情况是不可能的，下面分两种情况说明：

情况 2.1　当 $\left(\dfrac{a^p+b^p}{a+b}, a+b\right)=p$ 时，由 $a+b \mid a^p+b^p$ 与引理 1 知：$a+b=p^{\alpha-1}\cdot u$，且 $\alpha \geqslant 2$，其中 u 的可能取值为：1，$(2p+1)^\beta$，$6p+1$，$8p+1$，$(2p+1)^\beta(6p+1)$，$(2p+1)^\beta(8p+1)$，$(6p+1)(8p+1)$ 以及 $(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1)$. 由引理 3 知

$$a^p+b^p \geqslant \left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u+1}{2}\right)^p + \left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u-1}{2}\right)^p = \frac{(p^{\alpha-1}\cdot u+1)^p+(p^{\alpha-1}\cdot u-1)^p}{2^p}$$

即

$$(p^{\alpha-1}\cdot u+1)^p+(p^{\alpha-1}\cdot u-1)^p \leqslant 2^p p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1)$$

注意到 $p(\geqslant 17)$ 为素数，且 $\alpha \geqslant 2$，当 $1 \leqslant \beta \leqslant 4$ 时，经计算可知

$$(p^{\alpha-1}\cdot u+1)^p+(p^{\alpha-1}\cdot u-1)^p > 2^p p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1)$$

矛盾.

情况 2.2　当 $\left(\dfrac{a^p+b^p}{a+b}, a+b\right)=1$ 时，分(i)，(ii)两种情况：

(i) $a+b=p^\alpha\cdot u$，其中 u 的可能取值为：1，$(2p+1)^\beta$，$6p+1$，$8p+1$，$(2p+1)^\beta(6p+1)$，$(2p+1)^\beta(8p+1)$，$(6p+1)(8p+1)$，$(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1)$，此种情况的证明与(1)式相同.

(ii) $a+b=u$，其中 u 的可能取值为：$(2p+1)^\beta$，$6p+1$，$8p+1$，$(2p+1)^\beta(6p+1)$，$(2p+1)^\beta\cdot(8p+1)$，$(6p+1)(8p+1)$，$(2p+1)^\beta(6p+1)(8p+1)$.

当 $a+b=6p+1$ 时，则有

$$a^p+b^p+\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i b^{p-i} = (6p+1)^p \tag{5}$$

由 $p \mid a^p+b^p$，$p \mid C_p^i$(其中 $1 \leqslant i \leqslant p-1$)知，素数 p 整除(5)式的左边，但不能整除其右边，矛盾.

同理可证其它情况.

所以当 a^p+b^p 除素数 p 之外恰好含有 3 个不同素因子时，一定有 $S(a^p+b^p) \geqslant 10p+1$.

情况 3　若 a^p+b^p 除 p 之外仅含有 2 个不同素因子，由(4)式可知 a^p+b^p 中不可能同时含有素因子 $2p+1$ 和 $4p+1$，也不可能同时含有素因子 $4p+1$ 和 $8p+1$. 因此由(4)式及 $S(n)$ 的性质，最多考虑下面 3 种形式

$$a^p+b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$$
$$a^p+b^p = p^\alpha(2p+1)^\beta(8p+1)^\gamma$$
$$a^p+b^p = p^\alpha(4p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$$

若 $a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(8p+1)^\gamma$ 成立，则当 $\beta\geqslant 5$ 或者 $\gamma\geqslant 2$ 时，由引理 2 知

$$S(a^p+b^p)\geqslant S((2p+1)^\beta)\geqslant 5\cdot(2p+1)\geqslant 10p+1$$

或者

$$S(a^p+b^p)\geqslant S((8p+1)^\gamma)\geqslant 2\cdot(8p+1)\geqslant 10p+1$$

于是，我们可以假设 $1\leqslant\beta\leqslant 4$，$\gamma=1$．现在证明在这种情况下，当 $p\geqslant 17$ 时，a^p+b^p 不可能含有 p 的方幂，若不然，当 $\alpha\geqslant 2$ 时，由 Euler-Fermat 定理知：$a^p\equiv a(\bmod p)$，$b^p\equiv b(\bmod p)$，即 $a+b\equiv a^p+b^p\equiv 0(\bmod p)$．设 $a+b=p^k\cdot u$，$(p,u)=1$，由引理 1 可知 $k=\alpha$ 或者 $k=\alpha-1$，显然 $a^p+b^p=p^\alpha\cdot(2p+1)^\beta(8p+1)$ 且 $1\leqslant\beta\leqslant 4$，$k=\alpha$，不可能，因为此时

$$a^p+b^p\geqslant\left(\frac{p^\alpha\cdot u+1}{2}\right)^p+\left(\frac{p^\alpha\cdot u-1}{2}\right)^p=\frac{(p^\alpha\cdot u+1)^p+(p^\alpha\cdot u-1)^p}{2^p}$$

而素数 $p\geqslant 17$，$1\leqslant\beta\leqslant 4$，显然有$(p^\alpha\cdot u+1)^p+(p^\alpha\cdot u-1)^p\geqslant 2^p p^\alpha(2p+1)^\beta(8p+1)$，矛盾．

于是可设 $k=\alpha-1$，从而有 $a+b=p^{\alpha-1}\cdot u$，由引理 3 知

$$\left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u+1}{2}\right)^p+\left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u-1}{2}\right)^p\leqslant a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(8p+1)$$

注意到 $\alpha\geqslant 2$，$1\leqslant\beta\leqslant 4$，当素数 $p\geqslant 17$ 时，容易验证

$$\left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u+1}{2}\right)^p+\left(\frac{p^{\alpha-1}\cdot u-1}{2}\right)^p>p^\alpha(2p+1)^\beta(8p+1)$$

矛盾．当 $\alpha=1$ 时，由于$a+b\equiv a^p+b^p\equiv 0(\bmod p)$，故 $a+b=pu$．由于

$$p(2p+1)^\beta(8p+1)=a^p+b^p\geqslant\left(\frac{p\cdot u+1}{2}\right)^p+\left(\frac{p\cdot u-1}{2}\right)^p=\frac{(p\cdot u+1)^p+(p\cdot u-1)^p}{2^p}$$

经计算有$(p\cdot u+1)^p+(p\cdot u-1)^p\geqslant 2^p p(2p+1)^\beta(8p+1)$，矛盾．所以 a^p+b^p 不可能含有素因子 p，则 $a^p+b^p=(2p+1)^p(8p+1)$ 且 $1\leqslant\beta\leqslant 4$．首先证明 $a^p+b^p=(2p+1)^4(8p+1)$ 不成立．由于 $a+b\equiv a^p+b^p\equiv(2p+1)^4(8p+1)\equiv 1(\bmod p)$，设 $a+b=tp+1$，由引理 1 可知

$$\left(\frac{a^p+b^p}{a+b},a+b\right)=\left(\frac{(2p+1)^4(8p+1)}{tp+1},tp+1\right)=1$$

所以 $t=8$，即 $a+b=8p+1$．由于

$$(4p+1)^p+(4p)^p=\left(\frac{(8p+1)+1}{2}\right)^p+\left(\frac{(8p+1)-1}{2}\right)^p\leqslant a^p+b^p=(2p+1)^4(8p+1)$$

注意到素数 $p\geqslant 17$，显然有$(4p+1)^p+(4p)^p>(2p+1)^4(8p+1)$，矛盾，即 $a^p+b^p>(2p+1)^4(8p+1)$．而当 $1\leqslant\beta\leqslant 3$ 时，显然$(2p+1)^4(8p+1)>(2p+1)^\beta(8p+1)=a^p+b^p$，矛盾．同理可证当 $p\geqslant 17$ 时，$a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta(6p+1)^\gamma$ 与 $a^p+b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta(8p+1)^\gamma$，结论 $S(a^p+b^p)\geqslant 10p+1$ 成立．

情况 4　若 a^p+b^p 仅含有 1 个不等于 p 的素因子 q，由(4)式可知，只须讨论以下 4 种情况：

$$a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta$$
$$a^p+b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta$$
$$a^p+b^p=p^\alpha(6p+1)^\beta$$
$$a^p+b^p=p^\alpha(8p+1)^\beta$$

若 $a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta$ 成立，当 $\beta\geqslant 5$ 时，由引理 2 可知

$$S(a^p+b^p)\geqslant S((2p+1)^5)=5(2p+1)\geqslant 10p+1$$

当 $\beta\leqslant 4$ 时，由情况 3 的讨论可知 a^p+b^p 中不可能含有 p 的方幂，所以当 $\alpha\geqslant 1$ 时，$a^p+b^p=p^\alpha(2p+1)^\beta$ 且 $1\leqslant\beta\leqslant 4$ 不可能成立，故 $a^p+b^p=(2p+1)^\beta$．

当 $\beta=4$ 时，即 $a^p+b^p=(2p+1)^4$ 时，由$a+b\equiv a^p+b^p\equiv(2p+1)^4\equiv 1(\bmod p)$，所以 $a+b=(mp+1)^n$．而 $a+b\mid a^p+b^p$，所以 $a+b=(2p+1)^n$．由引理 1 可知$(\frac{a^p+b^p}{a+b},a+b)=((2p+1)^{4-n},(2p+1)^n)=1$，所以$n=0,4$，即$a+b=1$或$a+b=(2p+1)^4=a^p+b^p$，这与$(a,b)=1$且$a\cdot b>1$，$p\geqslant 17$ 及 $a^p+b^p>a+b$ 相矛盾．显然 $2^p+1\leqslant a^p+b^p=(2p+1)^\beta$，由 $1\leqslant\beta\leqslant 3$ 及 $p\geqslant 17$，经过计算知上述不等式不成立．

同理可证：$a^p+b^p=p^\alpha(4p+1)^\beta$ 或者 $a^p+b^p=p^\alpha(6p+1)^\beta$ 或者 $a^p+b^p=p^\alpha(8p+1)^\beta$ 时结论成立. 于是定理1得证.

参考文献：

[1] LE Mo-hua. A Lower Bound for S($2^p(2^p-1)$)[J]. Smarandache Notions Journal, 2008, 12(12): 217-218.

[2] 苏娟丽. 关于Smarandache函数的一个下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(1): 133-134.

[3] 温田丁. Smarandache函数的一个下界估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 413-416.

[4] 李粉菊, 杨畅宇. Smarandache函数在数列 a^p+b^p 上的下界估计[J]. 西北大学学报：自然科学版, 2011, 41(3): 378-379.

[5] MARK F, PATRICK M. Bounding the Smarandache Funtion[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 2-3.

[6] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社, 2007.

[7] APOSTOL T. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

A New Lower Bound Estimate for Smarandache Function on Sequence a^p+b^p

SHI Peng, LIU Zhuo

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: In this paper, the elementary method and the congruence skill have been used to study the lower bound estimate problem of the Smarandache function on the sequence a^p+b^p, and a sharper lower bound estimate given for it. That is, for any distinct positive a and b, we have estimate $S(a^p+b^p)\geqslant 10p+1$, where $p(\geqslant 17)$ is a prime.

Key words: elementary method; congruence skill; Smaranche function; lower bound estimate

责任编辑 廖 坤