DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2010.01.005
第22卷 第1期 甘肃科学学报 Vol.22 No.1
2010年3月 Journal of Gansu Sciences Mar.2010

Smarandache函数的几个性质

杨存典, 李 超, 刘端森
(商洛学院 数学与计算科学系, 陕西 商洛 726000)

摘 要: 对于任意给定的正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为

$$S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}.$$

利用初等方法和解析方法研究函数 $S(n)$ 的有关性质, 并给出了一些有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache函数; 正整数; 渐近公式
中图分类号: O156.4 文献标志码: A 文章编号: 1004-0366(2010)01-0024-02

The Properties of the Smarandache Function

YANG Cun-dian, LI Chao, LIU Duan-sen
(Department of Mathematics and Computing Science, Shangluo College, Shangluo 726000, China)

Abstract: Given a positive integer n, the definition of the famous Smarandache function is: $S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}$. The main purpose of this paper is to study the properties of the Smarandache function by using the elementary and analytic methods and to give some interesting asymptotic formulas.

Key words: Smarandache function; positive integer; asqmptotic formula

1 预备知识

对于任意一个正整数 n, 著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m, 使得 $n\mid m!$, 即 $S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此, 不难计算出 $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, …. 关于 $S(n)$ 的性质, 许多学者进行了研究, 获得不少有趣的结果[1~5]. 例如, Yu Yaming 研究了一类包含 $S(n)$ 方程的可解性[3], 证明了该方程有无穷多组正整数解, 即证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$, 方程 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$ 有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

Jozsef Sandor[3] 进一步证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$, 存在无穷多组正整数解 $(m_1,m_2 m,\cdots,m_k)$, 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k),$$

同时, 又存在无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$, 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k).$$

此外, 徐哲峰获得了有关 $S(n)$ 的一个结果[6], 即证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数.

下述研究了函数 $S^2(n)$ 和 $\frac{S^2(n)}{n}$ 的均值, 并得到几个有趣的渐近公式, 证明结论:

定理1 对任意实数 $x\geqslant 2$, 有近似公式

$$\sum_{n\leqslant x}S^2(n)=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).$$

定理2 对任意实数 $x\geqslant 2$, 有近似公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S^2(n)}{n}=\frac{\zeta(3)x^2}{3\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

收稿日期: 2009-09-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155); 商洛学院科研基金项目(07sky16)

2　几个引理

为了完成定理的证明，需要以下引理：

引理 1　对于任意正整数 n

(ⅰ) 如果 $p(n)>\sqrt{n}$，则 $S(n)=p(n)$；

(ⅱ) 如果 $n=mp_1p(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)<\sqrt{n}$，则 $S(n)=p(n)$；

(ⅲ) 如果 $n=mp(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)<\sqrt{n}$，则

$$S(n)=2p(n),$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子函数.

证明见文献[6].

引理 2　对于任意实数 $x\geqslant 2$ 有如下估计

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}} S^2(n)\ll x^2\ln^2 x.$$

证明　使用 Eeler′s[7] 求和公式可以得到

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}} S^2(n)\ll\sum_{n\leqslant x} n\ln^2 n=\int_1^x t\ln^2 t\mathrm{d}t+\int_1^x(t-[t])(t\ln^2 t)^1\mathrm{d}t+x\ln^2 x(x-[x])\ll x^2\ln^2 x. \tag{1}$$

引理 3　令 p 为素数，m 为正整数且 $m\leqslant x^{\frac{1}{3}}$，则有渐近公式

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right),$$

证明见文献[6].

3　定理的证明

首先证明定理 1，我们定义集合 A 和 B

$$A=\{n\mid n\leqslant x, p(n)\leqslant\sqrt{n}\},$$

$$B=\{n\mid n\leqslant x, p(n)>\sqrt{n}\},$$

同样，利用 Abel′s[7,8] 求和公式和引理 1 可以得到

$$\sum_{n\in B}S^2(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}}p^2(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3n^3\ln\frac{x}{n}}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^2\frac{x}{n}}\right)\right),$$

因为　$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}=\zeta(3)+O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right),$$

所以

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}}S^2(n)=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right), \tag{2}$$

由式(1)、式(2) 可得

$$\sum_{n\leqslant x}S^2(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}}S^2(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}}S^2(n)=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right)+O(x^2\ln^2 x)=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).$$

其次证明定理 2，应用 Abel′s 求和公式得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S^2(n)}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}S^2(n)+\int_1^x\frac{1}{t^2}\left(\sum_{n\leqslant t}S^2(n)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right)\right)+\int_1^x\frac{1}{t^2}\left(\frac{\zeta(3)t^3}{3\ln t}+O\left(\frac{t^3}{\ln^2 t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$
$$\frac{\zeta(3)x^2}{3\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)+\int_1^x\frac{\zeta(3)t}{3\ln t}\mathrm{d}t+O\left(\int_1^x\frac{t}{\ln^2 t}\mathrm{d}t\right)=\frac{\zeta(3)x^2}{3\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

综上完成定理的证明.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Proplem, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Wang Yong-xing. On the Smarandache Function[J]. Reserch on Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.

[3] Lu Ya-ming. On the Solution of an Equation Involving the Smarandache Function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] Sandor J. On a Dual of the Pseudo-smarandache Function[J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 16-23.

[5] 杨存典，李超，刘端森. 关于五边形数的余数及渐近公式[J]. 甘肃科学学报，2007，19(2)：16-18.

[6] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报(中文版)，2006，49(5)：1 009-1 012.

[7] Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. The Elementary Number Theory[M]. Beijing: Beijing University Press, 2003.

[8] Yang Cun-dian, Liu Duan-sen. On the Mean Value of a New Arithmetical Function[A]. Research on Smarandache Problems in Number Theory Ⅱ[C], Xi′an: Xiquan Publishing House Chinese Branch, 2004.

作者简介：

杨存典(1965-)男，陕西省山阳人，1989 年毕业于陕西师范大学数学系，硕士，现任商洛学院数学与计算科学系教授，主要从事数论的教学与研究.