Smarandache 函数的均值分布性质

王艳青,郭金保

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:定义了 Smarandache 函数 $s(n)$ 和函数 $z(n)$,并给出了他们的混合均值。

关键词:Smarandache 函数; 渐近公式

中图分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-602X(2011)03-0001-02

1 引言和结论

定义 对于给定的自然数 n,著名的 Smarandache 函数 $s(n)$ 定义为:

$s(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$,并且我们还定义了函数 $z(n)$ 为:

$z(n)=\min\{k: n\leqslant k(k+1)/2\}$。

在文献[1]中,Smarandache 教授让我们研究函数 $s(n)$ 的性质。关于 $s(n)$ 的初等性质很多学者进行过研究,并且取得了一系列的结果,参阅文献[1,6]。例如,文献[2]证明了如果 n 是一个素数,那么 $sL(n)=s(n)$,这里 $sL(n)$ 是 Smar-andache LCM 函数,定义为:

$sL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_\gamma^{\alpha_\gamma}\}$。

并且还提出了下面的问题:$sL(n)=s(n)$,$s(n)\neq n$?文[3]则完全解决了这个问题。但是到目前为止没有人研究过 $s(n)$ 和 $z(n)$ 的混合均值问题至少我们还没有看到任何相关的论文,这篇文章中我们将用初等的方法去研究 $s(z(n))$ 的均值性质,并且给出了一个有趣的渐近公式,即证明了以下的结论:

定理 设 $k\geq 2$ 为给定的正整数,则对任意实数 $x\geq 1$,有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x} s(z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

为了证明这个定理引入以下几个引理:

2 引理及其证明

引理 1 对于任意的正整数 α,有:$s(p^\alpha)\leqslant\alpha p$,特别当 $\alpha\leqslant p$ 时有 $s(p^\alpha)=\alpha p$,且 p 是素数。

引理 2 对于任意的正整数 n,设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则我们有:

$s(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{s(p_i^{\alpha_i})\}$。

引理 3 如果 $p(n)>\sqrt{n}$,则有 $s(n)=p(n)$。

引理 4 设 p 为素数,m 为正整数且 $m\leqslant\sqrt{2x}$,则有渐近公式:

$$\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^2\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)。$$

证明:设 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1$,即 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数的个数,利用 Abel 求和公式、分部积分法以及素数定理可得到:

$$\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2=\frac{2x}{m^2}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)-m^2\pi(m)-\int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}}2y\cdot\pi(y)\,dy$$

收稿日期:2011-03-28

作者简介:王艳青(1985—),女,陕西榆林人,延安大学在读硕士研究生。

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^2 \ln \sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i (2x)^{\frac{3}{2}} \ln^i m}{m^3 \ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3 \ln^{k+1} x}\right) \qquad (1)$$

其中 b_i 为可计算的常数。

3 定理的证明

证明：在和式 $\sum_{n \le x} s(z(n))$ 中，注意到当

$\frac{(m-1)m}{2} + 1 \le n \le \frac{(m+1)m}{2}$ 时都有 $z(n) = m$，也就是说方程 $z(n) = m$ 有 m 个解，即

$$n = \frac{(m-1)m}{2}, \frac{(m-1)m}{2} + 2, \cdots, \frac{(m+1)m}{2}.$$

由于 $n \le x$，所以由函数 $z(n)$ 的定义可知当 $z(n) = m$ 时，m 满足：

$1 \le m \le \frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$，于是有

$$\sum_{n \le x} s(z(n)) = \sum_{\substack{n \le x \\ z(n)=m}} s(m) = \sum_{m \le \frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}} ms(m) + O(x)$$

$= \sum_{m \le \sqrt{2x}} ms(m) + O(x)$，其中设 $\sqrt{2x} = x_o$。

现在我们将所有 $1 \le m \le x_o$ 分成两个集合 U 和 V 如下：

$U = \{m: m \le x_o, p(n) \le \sqrt{m}\}$，

$V = \{m: m \le x_o, p(n) > \sqrt{n}\}$。

其中 $p(n)$ 为 n 的最大素因子。

由 $s(n) = \max\limits_{1 \le i \le k} \{s(p_i^{\alpha_i})\}$ 及集合 U 的定义可知，对任意的正整数 $m \in U$，当 m 的标准分解式为 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 时有：

$$s(m) = \max\{s(p_i^{\alpha_i})\} \le \max_{1 \le i \le k} \{\alpha_i p_i\} \le \sqrt{m} \ln m.$$

于是我们可以得到：

$$\sum_{m \in U} ms(m) \le \sum_{m \in U} m \cdot \sqrt{m} \ln m \le \sum_{m \le x_o} m^{\frac{3}{2}} \ln m \le x_o^{\frac{3}{2}} \ln x_o \qquad (2)$$

当 $m \in V$ 时，设 $m = m_1 p$，这里 $m_1 < \sqrt{m} < p$。

$$\sum_{m \in V} ms(m) = \sum_{\substack{m \le x_o \\ p|m, \sqrt{n} < p}} m \cdot s(m) = \sum_{\substack{mp \le x_o \\ m < p}} mp \cdot s(mp) = \sum_{m \le \sqrt{x_o}} \sum_{m < p \le \frac{x_o}{m}} mp^2.$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\mu} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$，并结合(1)式可得：

$$\sum_{m \in V} s(z(n)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_o^3}{m^2 ln x_o} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i x_o^3 \ln^i m}{m^3 \ln^i x_0} + O\left(\frac{x_o^3}{2\sqrt{2} m^3 \ln^{k+1} x_0}\right) = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{x_o^3}{\ln x_o} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i \cdot x_o^3}{\ln^i x_o} + O\left(\frac{x_o^3}{2\sqrt{2} \ln^{k+1} x_0}\right) \qquad (3)$$

其中 a_i 为可计算的常数。由集合 U 及 V 的定义并综合(2)和(3)可得：

$$\sum_{n \le x} s(z(n)) = \sum_{m \le \sqrt{2x}} m \cdot s(m) + O(x)$$
$$= \sum_{m \in U} m \cdot s(m) + \sum_{m \in V} m \cdot s(m) + O(x)$$
$$= \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln \sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中 $a_i (i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数，于是完成了定理的证明。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.

[2] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache notions Journal, 2001(12): 307 – 309.

[3] Maohua Le. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache notions Journal, 2004(14): 186 – 188.

[4] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache Notions Journal [M]. 2002: 37 – 42.

[5] Wang Yongxing. On the Smarandache problems in number theory [M]. Hexis, 2005: 103 – 106.

[6] Tom M. Apsto l. Introduction to Analylic number theo ry [M]. New York: Spring Verylag, 1976.

[责任编辑 贺小林]

Distribution of the Mean Value of Smarandache Function

WANG Yan-qing, GUO Jin-bao

(College of Mathematics amd Computer Science, Yan an University, Yan an 716000, China)

Abstract: Smarandache function $s(n)$ and an function $z(n)$ was defined, and an asymptotic formuler was given.

Key words: Smarandache function; asymptotic formuler