

Smarandache 函数的混合均值研究

黄 炜

(宝鸡职业技术学院 基础部 陕西 宝鸡 721013)

摘 要:对于任意的正整数 n 我们用 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数,即 $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in \mathbb{N}\}$,文章主要利用初等方法和解析方法,研究 Smarandache 函数 $\Lambda(n)S(n)$ 、 $\Lambda_2(n)S(n)$ 的混合均值性质,获得了两个较强的渐近公式.

关键词:Smarandache 函数;复合函数;均值;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标志码:A 文章编号:1009-5128(2011)12-0006-03

收稿日期:2011-04-06

基金项目:国家自然科学基金项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)

作者简介:黄炜(1961—),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院教授,理学硕士.研究方向:数论及特殊函数.

0 引言与结论

对于任意的正整数 n 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为: $S(n) = \min\{m: n \mid m!, m \in \mathbb{N}\}$ 例如: $S(1) = 1, S(2) = 2, S(3) = 3, S(4) = 4, S(5) = 5, S(6) = 6, S(7) = 7, S(8) = 4, S(9) = 6, S(10) = 5$. 从 $S(n)$ 的定义和性质,很容易推断,对于任意正整数 n ,若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,则有

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{\alpha_i})\} \quad (1)$$

关于 $S(n)$ 的算术性质,有许多学者进行研究^[2-5],并得到了许多重要理论价值的成果,文[1]研究了 Smarandache 函数的值分布性质,获得了下面更深刻的结果:

设 $P(n)$ 表示 n 最大素因数,对于任意整数 $x > 1$,我们有渐近公式:

$$\sum_{n \leq x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

这里 $\zeta(s)$ 是黎曼的 Zeta 函数.文献[3]研究了 Smarandache 函数的均值性质,给出了 $S(n)$ 及 $\frac{S(n)}{n}$ 均值的渐近公式

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} S(n) &= \frac{\pi^2 x^2}{12 \ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) \\ \sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{n} &= \frac{\pi^2 x}{6 \ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \end{aligned}$$

在参考文献[2]中,Melvyn 给出了广义 Mangoldt 函数的定义,即 $\Lambda_r(n) = (\mu^* L^r)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln^k(n)$,其中 $\mu(d)$ 是 Möbius 函数,“表示 Dirichlet 乘积 $L(n) = \ln n, r \geq 1$,当 $r = 1$ 时,它即为一般的 Mangoldt 函数.

本文利用初等数学方法研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 、Mangoldt 函数和广义 Mangoldt 函数的一些新均值公式.即就是证明了下面的定理:

定理 1 设 k 为任意给定的正整数,对任何 $x > 1$ 的实数,有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) S(n) = x^2 \sum_{i=0}^k \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^k x}\right)$$

其中 $\Lambda(n)$ 是 Mangoldt 函数 $b_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, k)$ 是可计算常数.

定理 2 对任何正整数 $x \geq 2$ 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) S(n) = x^2 \ln x \sum_{i=0}^k \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^k x}\right)$$

其中 Λ_2 是 Mangoldt 函数当 $r = 2$ 的情形 $c_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, k)$ 是可计算常数.

1 两个引理

为了完成定理的证明, 我们需要下面两个引理:

引理 1 对任一实数 $x > 1$, Mangoldt 函数的均值是:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x)$$

在参考文献 [2] 中, 这一结果是在 Riemann 猜想成立的前提下得到的, 是一个和 Riemann 猜想等价的命题.

引理 2 对任一实数 $x > 1$, 广义 Mangoldt 函数 $\Lambda_2(n)$ 的均值是:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_2(n) = 2x \ln x + O(x)$$

证明见参考文献 [2].

2 定理的证明

我们现在来完成定理的证明. 首先证明定理 1.

从 $S(n)$ 的定义和性质, 很容易推断, 对于任意正整数 n , 若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, 则有

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

特别地 $S(p^\alpha) = p^\alpha$

由 $\Lambda(n)$ 的定义可得:

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) S(n) = \sum_{a \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leq x \frac{1}{a}} \Lambda(p^a) S(p^a) = \sum_{p \leq x} p \ln p + \sum_{2 \leq a \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leq x \frac{1}{a}} p^a \ln p \tag{2}$$

由引理 1 及 Abel 求和公式以及素数分布定理(参阅文献 [6] 中第三章定理 2):

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{i=1}^k \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ 为可计算的常数且 $a_1 = 1$. 并注意到 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} p \ln p &= x \ln x \pi(x) - \int_2^x (\ln y + 1) \pi(y) dy \\ &= x \ln x \cdot \left(\sum_{i=1}^k \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right) \right) = x^2 \sum_{i=0}^k \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $b_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, k)$ 是可计算常数.

另一方面

$$\sum_{2 \leq a \leq \frac{\ln x}{\ln 2}} \sum_{p \leq x \frac{1}{a}} p^a \ln p \leq x \ln x \tag{4}$$

结合 (1)、(2) 及 (3) 可得

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) S(n) = x^2 \sum_{i=0}^k \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $b_i (i = 0, 1, 2, 3, \dots, k)$ 是可计算常数.

这就完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明可以利用定理 1 的证明方法和引理 2 的结论证得.

参考文献:

[1] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报(中文版) 2006 49(5): 1009 – 1012.
 [2] Natlmsun Melvyn B. Elementary methods in number theory [M]. Beijing: World Publishing Company ,2003. 293.
 [3] Wang Y. X. . On the Smaranache function [C]//Zhang Wenpeng. Research on Smaranache Problems in Number Theory Collect-ed papers. America: Hexis 2005. 103 – 106.
 [4] 黄炜. 关于正整数的 k 次方根数列均值 [J]. 吉首大学学报(自然科学版) 2010 31(4): 8 – 9.
 [5] 黄炜 赵教练. 关于 Smarandach 平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版) 2010 , 27 (6): 52 – 54.
 [6] 潘承洞 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社 ,1988.

【责任编辑 舒尚奇】

The Study of the Mean Value Involving Smarandache Function

HUANG Wei

(Department of Baoji Vocational and Technical College , Baoji 721013 , China)

Abstract: For any positive integer n , let $S(n)$ denotes the Smarandache function , that $S(n) = \min\{m: n | m! \ m \in N\}$. In this paper , we use the elementary methods to study the mean value properties of the composite function $A(n) S(n) \setminus A_2(n) S(n)$, and give two sharper asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache function; composite function; mean value; asymptotic formula

(上接第 5 页)

至此 ,我们完成了定理的全部证明.

参考文献:

[1] F. Smarandache. Collected papers Vol. III [M]. Bucharest: Tempus Publ. Hse. ,1998.
 [2] 徐哲峰. 关于 Smarandache 幂函数的平均值 [J]. 数学学报(中国系列) 2006 49(1): 77 – 80.
 [3] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer – Verlag ,1976.
 [4] 潘承洞 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社 2003.

【责任编辑 舒尚奇】

An Infinite Series Involving the Smarandanche Power Function SP(n)

ZHOU Huan-qin

(School of Mathematics and Information Science , Weinan Teachers University , Weinan 714000 , China)

Abstract: For any positive integer n , the Smarandanche power function $SP(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that n/m^m , where m and n have the same prime divisors. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the convergent properties of an infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$, and give some interesting i-dentities.

Key words: Smarandache power function; infinite series; the Riemann zeta-function