DOI :10.13338/j.issn.1674-649x.2006.04.027

西 安 工 程 科 技 学 院 学 报
Journal of Xi' an University of Engineering Science and Technology
第 20 卷第 4 期(总 80 期)　　2006 年 8 月　　Vol.20, No.4(Sum No.80)

文章编号: 1671-850X(2006)04-0494-03

Smarandache 双阶乘函数性质的研究

杨倩丽，王　涛，李海龙

(渭南师范学院 数学系，陕西 渭南 714000)

摘要: 研究 Smarandache 双阶乘函数的一个特殊问题. 依据初等数论和解析数论的有关知识，利用复合函数的有关性质，提出了关于 Smarandache 双阶乘函数的复合问题 $s(s(n!))$. 采取了归纳、推测等方法，得出 $s(n!)$ 的相关性质和 $s(s(n!))$ 的计算公式及相关结论.

关键词: Smarandache 双阶乘函数；不等式；复合函数

中图分类号: O 156.4　　文献标识码: A

在文献[1] 中，乐茂华教授在研究 Smarandache 双阶乘函数时，给出了 Smarandache 双阶乘函数 $s(n)$ 的有关性质，解决了 Russo 所提出关于 $s(n)$ 的几个不等式和差分 $|s(n+1)-s(n)|$；在文献[2] 中，Mark 和 Patrick 给出并解决了 $s(n)$ 的边界问题. 本文在此基础上讨论 $s(n!)$ 的性质，并推测 $s(s(n!))$ 的有关性质.

根据文献[1] Smarandache 双阶乘函数 $s(n)$ 的定义，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，存在一个最小正整数 m，有 $s(n)=m$，满足 $n \mid m!!$，其中 $m!!=\begin{cases}2\times 4\times \cdots\times m, & 2\mid m,\\ 1\times 3\times \cdots\times m, & 2\nmid m.\end{cases}$

1　$S(n!)$ 的性质

定理 1　$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$s(n!)=\begin{cases}n, & n=1,2;\\ 2(n-1), & n=2^{\alpha},\ \alpha>1;\\ 2n, & \text{其他}.\end{cases}\qquad(1)$$

证明　设 $m=s(n!)$，显然 $n=1,2$ 时(1) 式成立.

当 $n=2^{\alpha},\ \alpha>1$ 时，$n!$ 和 m 都是偶数. 因为 $(2(n-1))!!=2^{n-1}(n-1)!$，有 $n!\mid 2^{n-1}(n-1)!$，则 $m\leqslant 2(n-1)$. 如果 $m\leqslant 2(n-1)$，设 $r\in\mathbf{N}_+$，则 $m=2(n-1)-2r$. 又因为 $m=s(n!)$，则

$$\frac{(2(n-1)-2r)!!}{n!}=\frac{2^{n-r-1}(n-r)!}{(n-r-1)n!}=\frac{2^{n-r-1}}{(n-r-1)(n-r+1)\cdots(n-1)n}$$

必为一个整数，但在 n 或 $(n-1)$ 中必有一大于 1 的奇数. 因此矛盾，故 $m=2(n-1)$.

当 $n>2$ 且 $n=2^{\alpha},\ \alpha>1$ 时，$n!$ 和 m 都是偶数. 因为 $(2n)!!=2^n n!$，有 $n!\mid 2^n n!$，则 $m\leqslant 2n$. 如果 $m<2n$，设 $r\in\mathbf{N}_+$，则 $m=2n-2r$. 又因为 $m=s(n!)$，则

$$\frac{(2n-2r)!!}{n!}=\frac{2^{n-r}(n-r)!}{n!}=\frac{2^{n-r}}{(n-r+1)\cdots(n-1)n}$$

收稿日期: 2006-06-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(10271093)；陕西省教育厅基金项目(05JK189)

通讯作者: 杨倩丽(1964-)，女，陕西省大荔县人，渭南师范学院副教授，从事数论研究.

必为一整数，但在 n 或 $(n-1)$ 中必有一大于 1 的奇数. 因此矛盾，故 $m = 2n$. 于是完成了定理 1 的证明.

定理 2　方程 $s(n!) = n!$ 成立的充要条件是 $n = 1, 2, 3$.

证明　根据定理 1，显然 $n = 1, 2$ 满足条件；当 $n = 3$ 时，$s(n!) = 2n$，即 $s(3!) = 6 = 3!$，满足条件；当 $n > 3$ 时，根据定理 1 可知 $s(n!) = 2(n-1) \neq n!$，$s(n!) = 2n \neq n!$. 于是完成了定理 2 的证明.

定理 3　不等式 $n/s(n!) \leqslant 1/n + 1$，$\forall n \in \mathbf{N}_+$ 都成立.

证明　由定理 1 可知：当 $n = 1, 2$ 时，

$$n/s(n!) = n/n = 1 < 1/n + 1; \tag{2}$$

当 $n = 2^\alpha, \alpha > 1$ 时

$$n/s(n!) = n/2(n-1) \leqslant 2/3 < 1/n + 1; \tag{3}$$

当 n 其他情况时

$$n/s(n!) = n/2n = 1/2 < 1/n + 1. \tag{4}$$

由(2)，(3)，(4)式可知定理 3 成立.

定理 4　$\forall \varepsilon > 0$，不存在正整数 n 使得 $s(n!)/n < \varepsilon$ 成立.

证明　取 $\varepsilon = 1/2$，根据定理 1 可知：当 $n = 1, 2$ 时，

$$s(n!)/n = n/n = 1 > \varepsilon; \tag{5}$$

当 $n = 2^\alpha, \alpha > 1$ 时，

$$s(n!)/n = 2(n-1)/n = 2 - (1/n) > \varepsilon; \tag{6}$$

当 n 其他情况时，

$$s(n!)/n = 2n/n = 2 > \varepsilon. \tag{7}$$

由(5)，(6)，(7)式可知定理 4 成立.

2　$s(s(n!))$ 的性质

根据定理 1 可知

$$s(s(n!)) = \begin{cases} s(n), & n = 1, 2; \\ s(2n), & n = 2^\alpha, \alpha > 1; \\ s(2n), & \text{其他}. \end{cases}$$

根据文献[1] 可知 $s(n)$ 的性质，现在推测 $s(2n)$ 的性质.

定理 5　如果 $2 \nmid n$，则

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \tag{8}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的奇素数，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是正整数，则有

$$s(2n) = 2\max(s(p_1^{a_1}), s(p_2^{a_2}), \cdots, s(p_k^{a_k})). \tag{9}$$

证明　根据文献[3] 中定理及推论，设 $m_i = s(p_i^{a_i})$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$，可知 $2 \nmid m_i$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$，$p_i^{a_i} \mid m_i!!$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$. 设 $m = \max(m_1, m_2, \cdots, m_k)$，则有 $m_i!! \mid m!!$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$，故

$$p_i^{a_i} \mid m!! \quad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{10}$$

因为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是奇素数，所以

$$(p_i^{a_i}, p_j^{a_j}) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{11}$$

从(8)，(10)，(11)式可知 $n \mid m!!$，即有 $2n \mid (2m)!!$，则 $s(2n) \leqslant 2m$；另一方面，根据 m 的定义，如果 $s(2n) < 2m$，则存在素数幂 $p_j^{a_j}$　$(1 \leqslant j \leqslant k)$ 使 $2p_j^{a_j} \nmid s(2n)!!$.

从(8)式可知 $2n \nmid s(2n)!!$，故矛盾. 所以根据 $s(2n) \leqslant 2m$ 可知 $s(2n) = 2m$，即(9)式成立.

定理 6　如果 $2 \mid n$，则 $n = 2^a n_1$，其中 $a, n_1 \in \mathbf{N}_+$，且 $2 \nmid n_1$，则有

$$s(2n) \leqslant \max(s(2^a), 4s(n_1)). \tag{12}$$

证明　设 $m_0 = s(2^\alpha)$，$m_1 = s(n_1)$，有 $2^a \mid m_0!!$，$n_1 \mid m_1!!$. 因为 $(4m_1)!! = 4 \circ 6 \cdots (4m_1) = 4^{m_1} m_1! \circ 6 \circ 10 \cdots (4m_1 - 2) = 4^{m_1} m_1!!(m-1)!! \circ 6 \circ 10 \cdots (4m_1 - 2)$，所以 $m_1!! \mid (4m_1)!!$，有 $n_1 \mid (4m_1)!!$.

设 $m = \max(m_0, 4m_1)$，则 $m_0!! \mid m!!$，$(4m_1) \mid m!!$. 又因为 $(2^a, n_1) = 1$，故可知 $2n \mid m!!$，所以 $s(2n) \leqslant m$，即(12)式成立.

定理 7　设 p 是 n 的最小素因子，则有

$$s(2n)\geqslant 2p. \tag{13}$$

证明　设 $m=s(2n)$，根据文献[4]中定理4.13，如果 $2\mid n$，则 $p=2$，即(13)式成立.如果 $2\nmid n$，设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的奇素数，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是正整数，根据(9)式有

$$m=2\max(s(p_1^{a_1}),s(p_2^{a_2}),\cdots,s(p_k^{a_k})). \tag{14}$$

根据文献[4]中定理4可知 $p_i\mid s(p_i^{a_i})\quad(i=1,2,\cdots,k)$，则 $2p_i\mid s(2p_i^{a_i})\quad(i=1,2,\cdots,k)$，即 $s(2p_i^{a_i})\geqslant 2p_i\quad(i=1,2,\cdots,k)$.

根据(14)式有 $m\geqslant 2\min(p_1,p_2,\cdots,p_k)=2p$.所以，当 p 为最小素因子，有 $s(2n)\geqslant 2p$，于是完成了定理7的证明.

定理8　方程

$$s(2n)=2n \tag{15}$$

成立的充要条件是(i) $n=1$；(ii) $n=p$, p 是素数.

证明　根据文献[1]中定理1.7，文献[4]中定理4.7可知: $2n=2^a n_1$，其中 $a\in\mathbf{N}_+$，n_1 为奇数且 $n_1\geqslant 1$，根据定理6，如果(15)式成立，则

$$s(2n)=2^a n_1\leqslant\max(s(2^a),4s(n_1)). \tag{16}$$

由(16)式可知 $n=1$ 或 $a=1$ 时，定理8成立.当 $n=1$，若(15)式成立，则 $a=1,2$.根据(16)式可知,定理8当 $a=1$ 时，$n=1$ 成立，故(i)成立.

当 $a=1$ 时, $2n_1=s(2n_1)$ 成立，显然 n_1 是一个奇素数，否则 $\exists t\in\mathbf{N}_+$, $t<n_1$，则 $n_1\mid t!$.

又因为 $(2t)!!=2^t t!$，则 $2n_1\mid(2t)!!$,由此可知

$$s(2n_1)\leqslant 2t\leqslant 2n. \tag{17}$$

与 $2n_1=s(2n_1)$ 矛盾.故 n_1 为奇素数.

由(17)式可知，如果

$$s(2n_1)<2n_1 \tag{18}$$

则 $s(2n_1)=2n_1-2r$, 其中 $r\in\mathbf{N}_+$. 但

$$\frac{(2n_1-2r)!!}{2n_1}=\frac{2^{n_1-r}(n_1-r)!}{2n_1}=\frac{2^{n_1-r-1}(n_1-r)!}{n_1}$$

不是整数，所以(18)式是不可能成立的,所以 p 必为奇素数.

当 $a=2$ 时, $4n_2=s(4n_2)$ 成立的充要条件是 $n_2=1$，令 $n_1=2n_2$，则 $n_1=2$，故 $2_{n_1}=s(2n_1)$ 成立.所以，当 $a=1$ 时，n_1 为素数,根据(16)式可知 n 为素数.于是完成了定理8的证明.

参考文献:

[1] MAOHUA L E. On the Smarandache double factorial function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 1(1-2-3): 37-42.

[2] FARRUS Mark, MITCHELL Patrick. Bounding the smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 1(1-2-3): 37-42.

[3] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 16-18.

[4] RUSSO F. An introduction to the Smarandache double factorial function[J]. Smarandache Notions, 2001(12): 158-167.

A question about Smarandache double factorial function

YANG Qian-li, WANG Tao, LI Hai-long

(Department of Mathematics, Weinan Teachers College, Weinan, Shaanxi 714000, China)

Abstract: A special problem of the Smarandache double factorial function is researched. According to the relevant knowledge of Elementary number theory and Analytic number theory, it is put forward that the compound question about the Smarandache double factorial function is $s(s(n!))$. By using the method of induction, extrapolation and so on, the relevant properties about $s(n!)$ and calculation formula and relevant important conclusions about $s(s(n!))$ are drawn.

Key words: Smarandache double factorial function; inequality; composite function

编辑: 董军浪; 校对: 武　晖