第49卷第1期　　数学学报中文版　　Vol.49, No.1
2006年1月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　　Jan., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)01-0077-04　　文献标识码: A

Smarandache 幂函数的均值

徐哲峰

西北大学数学系 西安 710069
E-mail: zfxu@yeou.com

摘　要　对于给定的自然数 n, Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 定义为 $SP(n)=\min\{m: n\,|\,m^m, m\in N\}$. 本文研究了这个函数的均值分布性质, 并利用解析方法得到了 Smarandache 幂函数的一个较强的均值公式.

关键词　Smarandache 幂函数; 均值; 渐近公式
MR(2000) 主题分类　11B83
中图分类　O156.4

On the Mean Value of the Smarandache Power Function

Zhe Feng XU

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, *P. R. China*
E-mail: zfxu@yeou.com

Abstract　Given an positive integer n, we define the Smarandache power functions $SP(n)$ as follows: $SP(n)=\min\{m: n\,|\,m^m, m\in N\}$. In this paper, we study the mean value distribution property of $SP(n)$, and obtain a sharper asymptotic formula for the mean value of the Smarandache power function.

Keywords　Smarandache power function; mean value; asymptotic formula
MR(2000) Subject Classification　11B83
Chinese Library Classification　O156.4

1　引言及结论

对于给定的自然数 n, Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 定义为

$$SP(n)=\min\{m: n\,|\,m^m\; m\in N\}.$$

当 n 取遍自然数时, 由 $SP(n)$ 便得到了如下的一个数列: 1, 2, 3, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 11, 6, 13, 14, 15, 4, 17, 6, 19, 10, ... 在文 [1] 中, Smarandache 教授让我们研究数列 $\{SP(n)\}$ 的性质. 从 $SP(n)$ 的定义很容易得到: 如果 n 是一个素数的方幂即 $n=p^\alpha$, 则有

$$SP(n)=\begin{cases} p, & \text{如果}\quad 1\le\alpha\le p;\\ p^2, & \text{如果}\quad p+1\le\alpha\le 2p^2;\\ p^3, & \text{如果}\quad 2p^2+1\le\alpha\le 3p^3;\\ & \cdots\\ p^\alpha, & \text{如果}\quad (\alpha-1)p^{\alpha-1}+1\le\alpha\le\alpha p^\alpha.\end{cases}$$

收稿日期: 2004-08-18; 接受日期: 2004-10-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60472068)

如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 且对所有的 α_i $(i=1,2,\ldots,r)$, 都有 $\alpha_i\le p_i$, 那么 $SP(n)=U(n)$, 其中 $U(n)=\prod_{p\mid n}p$. 令 $\mathcal{A}$ 表示所有具有这个性质的 n 的集合, 则 $SP(n)$ 在集合 $\mathcal{A}$ 上具有可乘性, 即对任意的 $n_1,n_2\in\mathcal{A}$. 如果 $(n_1,n_2)=1$, 则 $SP(n_1n_2)=SP(n_1)SP(n_2)$. 然而 $SP(n)$ 却不是可乘函数, 比如 $SP(8)=4$, $SP(3)=3$, 而 $SP(24)=6\neq SP(3)\times SP(8)$. 因此对 $SP(n)$ 的均值性质研究就显得十分困难. 但是对于大部分的 n, $SP(n)$ 的值等于函数 $U(n)$ 的值, 所以在 $SP(n)$ 的许多均值问题研究中, 我们可以用可乘函数 $U(n)$ 代替非可乘函数 $SP(n)$. 本文利用解析方法证明了这一点, 并获得了 $SP(n)$ 的几个有趣的渐近公式, 即证明了:

定理 1 对任意的实数 $x\ge 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}SP(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}).$$

其中 $\prod_p$ 表示对所有的素数求积, ϵ 为任意给定的正数.

定理 2 对任意的实数 $x\ge 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\phi(SP(n))=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{2}{p(p+1)}\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}),$$

其中 $\phi(n)$ 为欧拉函数.

定理 3 对任意的实数 $x\ge 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}d(SP(n))=\frac{6x\ln x}{\pi^2}+\left(\frac{12\gamma-6}{\pi^2}-\frac{72\zeta'(2)}{\pi^4}\right)x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

其中 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数, $\zeta(s)$ 表示 Riemann-zeta 函数, γ 为欧拉常数.

2 几个引理

为了完成定理的证明, 我们需要如下的几个引理:

引理 1 对任意的实数 $x\ge 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}U(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+O(x^{\frac{3}{2}+\epsilon}).$$

证明 令 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^s}$. 从 $U(n)$ 的定义知 $U(n)$ 是一个可乘函数, 那么由 Eurler 积公式 [2], 可得

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_p\left(1+\frac{U(p)}{p^s}+\frac{U(p^2)}{p^{2s}}+\cdots\right)=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}+\frac{p}{p^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_p\left(1+\frac{p}{p^s}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)=\zeta(s)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{s-1}}\right)\\&=\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\prod_p\left(1-\frac{1}{p(p^{s-1}+1)}\right).\end{aligned}$$

因为 $|U(n)|\le n$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n^{\sigma}}\right|<\zeta(\sigma-1)$, 其中 $\sigma>2$ 为 s 的实部, 则由 Perron 公式 [3], 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n^{s_0}}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)\\&\quad+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 N 为离 x 最近的整数, 当 x 为半奇数时取 $N = x - 1/2$, $\|x\| = |x - N|$. 在上式中取 $a(n) = U(n)$, $s_0 = 0$, $b = 3$, $T = x^{3/2}$, $H(x) = x$, $B(\sigma) = \zeta(\sigma - 1)$, 则有

$$\sum_{n\le x} U(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T} \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 $R(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p^{s-1}+1)}\right)$. 现在来估计

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T} \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

将积分线从 $3 \pm \mathrm{i}T$ 移到 $\frac{3}{2} \pm \mathrm{i}T$. 此时函数 $\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s = 2$ 处有一个一阶极点, 留数为 $\frac{R(2)x^2}{2}$, 即

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{3-\mathrm{i}T}^{3+\mathrm{i}T} + \int_{2+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T} + \int_{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T} + \int_{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}^{3-\mathrm{i}T} \right) \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s) \frac{x^s}{s} ds = \frac{R(2)x^2}{2}.$$

取 $T = x^{\frac{3}{2}}$, 容易估计

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{3+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T} + \int_{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T}^{3-\mathrm{i}T} \right) \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll \frac{x^3}{T} = x^{\frac{3}{2}}$$

和

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\frac{3}{2}+\mathrm{i}T}^{\frac{3}{2}-\mathrm{i}T} \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))} R(s) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

由于 $R(1) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right)$, 所以

$$\sum_{n\le x} U(n) = \frac{1}{2} x^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

这样便证明了引理 1.

引理 2 对任意的实数 $x \ge 1$, 有估计式

$$\sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha > p}} \alpha p \ll \ln^4 x.$$

证明 因为 $\alpha > p$, 所以 $p^p < p^\alpha \le x$, 那么

$$p < \frac{\ln x}{\ln p} < \ln x. \tag{1}$$

又因为 $p^\alpha \le x$, 则

$$\alpha \le \frac{\ln x}{\ln p} \le \frac{\ln x}{\ln 2}. \tag{2}$$

结合 (1) 和 (2), 我们有

$$\sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha > p}} \alpha p \ll \sum_{p \le \ln x} p \sum_{\alpha \le \frac{\ln x}{\ln 2}} \alpha \ll \ln^2 x \sum_{p \le \ln x} p. \tag{3}$$

注意到 $\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$, 其中 $\pi(x)$ 表示小于或等于 x 的素数的个数, 可以得到 $\sum_{p \le \ln x} p \ll \sum_{p \le \ln x} \ln x \ll \ln^2 x$. 结合 (3) 式, 便有

$$\sum_{\substack{p^\alpha \le x \\ \alpha > p}} \alpha p \ll \ln^4 x.$$

这样便证明了引理 2.

引理 3 对任意的实数 $x \geq 1$, 有估计式

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} SP(n) \ll x \ln^4 x.$$

证明 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 则 $U(n) = p_1 p_2 \cdots p_r$, 且 $U(n) \mid SP(n)$. 因为 $SP(n) > U(n)$, 所以至少存在一个素数 p_i $(1 \leq i \leq r)$, 它的次数 α_i 满足 $\alpha_i > p_1 p_2 \cdots p_r$. 令 $\alpha = \max\{\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, r\}$, p 表示 α 所对应的最大的素数, 那么根据 $SP(n)$ 的定义, 易知

$$SP(n) < \alpha p. \tag{4}$$

由 (4) 式, 便有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} SP(n) < \sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} \alpha p = \sum_{\substack{np^\alpha \leq x \\ (n, p^\alpha) = 1 \\ \alpha > pU(n)}} \alpha p \ll \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^\alpha \leq x \\ \alpha > p}} \alpha p.$$

从引理 2 知

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} SP(n) \ll \sum_{n \leq x} \ln^4 x = x \ln^4 x.$$

这样便证明了引理 3.

3 定理的证明

这节完成定理的证明. 首先证明定理 1. 注意到 $SP(n) \geq U(n)$. 我们有

$$\sum_{n \leq x} SP(n) - \sum_{n \leq x} U(x) = \sum_{n \leq x} (SP(n) - U(n)) = \sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} (SP(n) - U(n)) \ll \sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} SP(n).$$

此时由引理 3, 便有

$$\sum_{n \leq x} SP(n) - \sum_{n \leq x} U(x) \ll x \ln^4 x \text{ 或 } \sum_{n \leq x} SP(n) = \sum_{n \leq x} U(x) + O(x \ln^4 x).$$

再由引理 1, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} SP(n) &= \frac{1}{2} x^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2} + \epsilon}\right) + O(x \ln^4 x) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2} + \epsilon}\right).\end{aligned}$$

这样便完成了定理 1 的证明. 利用相同的方法我们还可以证明定理 2 和定理 3.

致谢 作者对导师张文鹏教授的细心指导表示衷心的感谢.

参考文献

[1] Smarandache F., Collected papers, Vol. III, Bucharest: Tempus Publ. Hse., 1998.
[2] Tom M. A., Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976.
[3] Pan C. D., Pan C. B., Foundation of analytic number theory, Beijing: Science Press, 1997, 98.