2010年2月
第26卷 第1期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Feb. 2010
Vol.26 No.1

Smarandache 平方数列$SP(n)$ 和 $IP(n)$ 的均值差

李粉菊

(铜川职业技术学院, 陕西 铜川 727031)

摘要: 对任意正整数n, Smarandache最小平方数列$SP(n)$定义为大于或等于n的最小完全平方数; 而Smarandache最大平方数列$IP(n)$定义为小于或等于n的最大完全平方数. 日本学者建议研究数列$SP(n)$和$IP(n)$的几个均值问题. 最近, 国内学者首次利用初等及解析方法对这些问题进行了研究, 并给出了数列$SP(n)$及$IP(n)$ 的几个均值公式, 同时解决了日本学者提出的几个问题. 本文进一步对这些问题进行研究, 获得了一个新的渐近公式.

关键词: Smarandache最小平方数; Smarandache最大平方数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2010)01-0069-04

1 引言及结论

对任意非负整数n, 我们用$SP(n)$ 表示n的Smarandache最小平方数, 即就是大于或等于n的最小完全平方数. 例如该数列的前几项为:0, 1, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 25, $\cdots$. 用$IP(n)$表示n的Smarandache最大平方数, 即就是不超过n 的最大完全平方数. 这个数列的前几项为:0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 25, $\cdots$. 令

$$S_n = \left(SP(1) + SP(2) + \cdots + SP(n)\right)/n;$$

$$I_n = \left(IP(1) + IP(2) + \cdots + IP(n)\right)/n;$$

$$K_n = \sqrt[n]{SP(1) + SP(2) + \cdots SP(n)};\ L_n = \sqrt[n]{IP(1) + IP(2) + \cdots IP(n)}.$$

在文献[1]中, 美籍罗马尼亚著名数论专家Smarandache教授提出了这两个数列, 并建议人们研究它的各种性质, 有关这些内容和有关背景参阅文献[2-5]. 在文献[6]中, 日本Kenichiro Kashihara 博士再次对这两个数列产生了兴趣, 同时提出了研究极限$\frac{S_n}{I_n}$、$(S_n - I_n)$、$\frac{K_n}{L_n}$及$(K_n - L_n)$的敛散性问题, 如果收敛, 并求其极限! 在文献[7]中, 荀素首次研究了这几个均值的渐近性问题, 并利用初等及解析方法证明了下面几个结论:

收稿日期: 2009-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金(10671155).

作者简介: 李粉菊(1963-), 副教授, 研究方向: 基础数学.

定理 1 对任意实数$x>2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} SP(n)=\frac{x^2}{2}+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right);\ \sum_{n\leqslant x} IP(n)=\frac{x^2}{2}+O\left(x^{\frac{3}{2}}\right).$$

由此定理立刻推出下面的推论:

推论 1 对任意正整数n, 有渐近公式

$$\frac{S_n}{I_n}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \text{及极限式}\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{I_n}=1.$$

推论 2 对任意正整数n, 有渐近公式

$$\frac{K_n}{L_n}=1+O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\ \text{及极限式}\ \lim_{n\to\infty}\frac{K_n}{L_n}=1,\ \lim_{n\to\infty}(K_n-L_n)=0.$$

然而, 关于S_n-I_n的渐近性问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有在现有的文献中看到. 然而, 作者认为这一问题是有趣的, 其原因在于一方面它的解决可以对文献[6]中的问题作以完整的回答, 画上完满的句号; 另一方面还可以刻画出两种数列$SP(n)$及$IP(n)$的本质区别. 本文基于文献[7]中的思想并结合同类项的合并以及误差项的精确处理, 研究了S_n-I_n的渐近性问题, 获得了一个较强的渐近公式, 具体地说也就是证明了下面的定理.

定理 2 对于任意正整数$n>2$, 我们有渐近公式$S_n-I_n=\frac{4}{3}\sqrt{n}+O(1)$.

本文的结果弥补了文献[7]的不足, 同时将文献[6]中对数列S_n及I_n提出的所有问题给予了解决. 当然, 由我们的定理我们还可以推出下面的极限:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-I_n)^{\frac{1}{n}}=1\ \text{及}\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n-I_n}{\sqrt{n}}=\frac{4}{3}.$$

2 定理的证明

这节我们用初等方法及Euler求和公式[8]分别对S_n及I_n进行非常精确的估计, 最终利用两个精确的估计给出定理的证明. 对任意正整数$n>2$, 显然存在唯一的正整数M满足: $M^2<n\leqslant(M+1)^2$, 即$M=n^{\frac{1}{2}}+O(1)$. 于是有

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n}SP(k)=\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M^2}SP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n}SP(k)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\ \sum_{(h-1)^2<k\leqslant h^2}SP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n}(M+1)^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(h^2-(h-1)^2\right)h^2+\frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(2h^3-h^2\right)+\frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2\\
&=\frac{M^2(M+1)^2}{2n}-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6n}+\frac{1}{n}\left(n-M^2\right)(M+1)^2\\
&=(M+1)^2-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6n}-\frac{M^2(M+1)^2}{2n}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

同理根据$IP(n)$的定义, 也有计算公式

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n} IP(k) = \frac{1}{n}\sum_{k<M^2} IP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n} IP(k) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\sum_{(h-1)^2\leqslant k<h^2} IP(k) + \frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n} M^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(h^2-(h-1)^2\right)(h-1)^2 + \frac{1}{n}\left(n-M^2+1\right)M^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\left(2h^3-5h^2+4h-1\right) + \frac{1}{n}\left(n-M^2+1\right)M^2 \\
&= \frac{M^2(M+1)^2}{2n} - \frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n} + \frac{2M(M+1)}{n} - \frac{M}{n} + \frac{\left(n-M^2+1\right)M^2}{n} \\
&= M^2 - \frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n} - \frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n} + \frac{2M^2+M}{n}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

于是由(1)和(2)式得

$$
\begin{aligned}
S_n - I_n &= (M+1)^2 - \frac{M(M+1)(2M+1)}{6n} - \frac{M^2(M+1)^2}{2n} - \\
&\quad \left[M^2 - \frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n} - \frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n} + \frac{2M^2+M}{n}\right] \\
&= 2M + 1 - \frac{2M^3+7M}{3n}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

注意到$M = n^{\frac{1}{2}} + O(1)$, 由(3)式便可推出

$$
\begin{aligned}
S_n - I_n &= 2M - \frac{2M}{3} + O(1) = \frac{4}{3}M + O(1) \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{n} + O(1).
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Perez, M L. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number theory and Geometry[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.

[3] Smarandache, F. Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems[M]. Phoenix: Hexis, 2006.

[4] 杜凤英. 关于Smarandache函数$S(n)$的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007,23(2):205-208.

[5] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007,23(2):235-238.

[6] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[7] 苟素. 关于$SSSP(n)$和$SISP(n)$的均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009,25(3):431-434.

[8] Tom M Apostol. Introduction to Analytical Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

On the difference between the mean value of the Smarandache square parts sequences $SP(n)$ and $IP(n)$

LI Fen-ju

(Tongchuan Vocational and Technical College, Tongchuan 727031, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache Superior Square Part $SP(n)$ is the smallest square greater than or equal to n, the Smarandache Inferior Square Part $IP(n)$ is the largest square less than or equal to n. Japanese scholar asked us to study several mean value problems related to sequences $SP(n)$ and $IP(n)$. Recently, Chinese scholar first used the elementary and analytic methods to study these problems, obtained several interesting mean value formulae, and solved several problems proposed by Japanese scholar. The main purpose of this paper is also to study the properties of the Smarandache square parts sequences, and give a new asymptotic formula involving $SP(n)$ and $IP(n)$.

Keywords: Smarandache superior square part, Smarandache inferior square part, mean value, asymptotic formula

2000MSC: 11B83

(上接第55页)

参考文献

[1] Fekete M, Szegö G. Eine Bermerkung uber ungeraade schlichte funktionen[J]. J. London. Math. Soc., 1933, 8(3):85-89.

[2] 高纯一. 近于凸函数族的Fekete-Szegö问题[J]. 数学年刊: A辑, 1994,15(6):650-656.

[3] 高纯一, 袁少谋. 星像函数的一个推广类的Fekete-Szegö不等式[J]. 长沙交通学院学报, 2003,19(3):1-4.

[4] 杨定恭. α型β阶Bazilevich函数的Fekete-Szegö问题[J]. 数学研究与评论, 1998,18(1):99-104.

[5] 刘名生. 强拟星象函数的Fekete-Szegö不等式[J]. 数学研究与评论, 2000,20(4):591-595.

[6] Srivastava H M, Mishra A K, Das M K. The Fekete-Szegö problem for a subclass of close-to-convex functions[J]. Complex Variables Theory Appl., 2001,44:145-163.

[7] 张洪光, 李书海. 关于Bazilevich函数族的一个扩展及其Fekete-Szegö问题[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008,24(1):167-173.

[8] 夏道行, 张开明. 从属函数的一些不等式[J]. 数学学报, 1958,8(3):408-412.

The Fekete-Szegö inequality for a subclass of α-convex functions

ZHOU Cong-hui

(Lianyungang Technical College, Lianyungang 222006, China)

Abstract: In this paper, a new class $M(\alpha; A, B)$ of functions α-convex functions is introduced. The Fekete-Szegö inequality for $M(\alpha; A, B)$ is discussed. The sharp result is obtained, which generalize some known results. It is discussed that the Fekete-Szegö inequality for $M(\alpha; A, B)$ which is a new class of functions α-convex functions. The sharp result and some properties are obtained, and the applications of the inequality of functions defined with Hadamard product are proved.

Keywords: Fekete-Szegö inequality, starlike functions, convex functions, subordination

2000MSC: 30C45