第 36 卷 第 1 期
2015 年 2 月
首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)
No. 1
Feb., 2015

一个 Smarandache 数列及其均值性质*

王明军

(渭南师范学院数学与信息科学学院，陕西 渭南 714000)

摘 要

对于任意的正整数 n,设$\{a(n)\}$表示将每个自然数 n 重复 n 次得到的数列. 在其通项公式的基础上,利用初等方法研究了该数列的均值,同时给出它与除数函数以及与函数 $e_p(n)$ 的复合函数的混合均值.

关键词: 复合函数，均值，渐近公式.

中图分类号: O156.4

1 引言及结论

在《Proposed Problems of Mathematics》一书中，Smarandache 教授引入了一个数列 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,⋯,对于每个自然数 n 重复 n 次,这是这个数列的构成规律,同时他给出了这个数列的通项公式:

对于 $r\geqslant 1$，有 $a_{\frac{r(r+1)}{2}-k}=r$,其中 $0\leqslant k\leqslant r-1$.
关于这个数列,还没有见到其它相关的结论.

为了应用方便,我们将该数列的通项公式表示为:当 $\frac{r(r-1)}{2}<n\leqslant\frac{r(r+1)}{2}$ 时,$a(n)=r$,其中 r 为正整数. 本文在此通项公式的基础上,利用初等方法研究了该数列的均值，以及它与除数函数、与函数 $e_p(n)$ 的复合函数的混合均值,并给出它们的渐近公式,即证明了下面的定理:

定理 1 对于任意给定的正实数 $x\geqslant 1$，$\{a(n)\}$ 是将每个正整数 n 重复 n 次得到的数列,则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

定理 2 对于任意给定的正实数 $x\geqslant 1$,$d(n)$ 是除数函数,则有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(a(n))=\frac{1}{2}x\ln x+Cx+O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}),$$ 其中 C 为一可计算的常数.

收稿日期: 2013-11-07

* 陕西省教育厅科研基金项目(11JK0478)资助.

定理 3 设 p 为一个素数,$e_p(n)$ 表示整除正整数 n 的 p 的最大幂指数,则对任意实数 $x\geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(a(n))=\frac{1}{p-1}x+O(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x).$$

2 引 理

为了完成定理的证明,需要下面的引理.

引理 1 对于任意的实数 $x\geqslant 1$,设 $\frac{M(M-1)}{2}<x\leqslant\frac{M(M+1)}{2}$,则有渐近公式:

$$M=\sqrt{2x}+O(1).$$

证明: 对于任意的实数 $x\geqslant 1$,设 $\frac{M(M-1)}{2}<x\leqslant\frac{M(M+1)}{2}$,

由不等式 $x\leqslant\frac{M(M+1)}{2}$,解得

$$M\geqslant\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2} \text{ 或者 } M\leqslant\frac{-1-\sqrt{1+8x}}{2}$$

由不等式 $\frac{M(M-1)}{2}<x$,解得

$$\frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}<M<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$$

由此可得 $\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}\leqslant M<\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$

即就是 $M=\sqrt{2x}+O(1)$.

引理 2　设 $d(n)$ 表示除数函数, $M \geqslant 1$ 为任一正整数, 则有渐近公式:

$$\sum_{t \leqslant M} td(t) = \frac{1}{2}M^2 \ln M + BM^2 + O(M^{\frac{3}{2}+\varepsilon}).$$

证明　令 $A(M) = \sum_{r \leqslant M} d(r)$, 由 Abel 恒等式(文[2], 定理 4.2), 我们可得到

$$\begin{aligned}\sum_{t \leqslant M} td(t) &= A(M)M - \int_1^M A(t)\,dt \\ &= M(M\ln M + (2\gamma - 1)M) - \int_1^M (t\ln t + (2\gamma - 1)t + O(t^{\frac{1}{2}}))\,dt + O(M^{\frac{3}{2}+\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2}M^2 \ln M + BM^2 + O(M^{\frac{3}{2}+\varepsilon})\end{aligned}$$

其中, B 为一可计算的常数.

3　定理的证明

首先证明定理 1.

对于任意给定的正数 $x \geqslant 1$, 必存在正整数 M, 满足 $\frac{1}{2}M(M-1) < x \leqslant \frac{1}{2}M(M+1)$. 由 $a(n)$ 的定义及引理 1 有:

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} a(n) &= \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{\frac{1}{2}r(r-1) < n \leqslant \frac{1}{2}r(r+1)} a(n) + \sum_{\frac{1}{2}M(M-1)) < n \leqslant x} a(n) \\ &= \sum_{r=1}^{M} \sum_{\frac{1}{2}r(r-1) < n \leqslant \frac{1}{2}r(r+1)} r + O(M^2) \\ &= \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1) + O(M^2) \\ &= \frac{1}{3}M^3 + O(M^2) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).\end{aligned}$$

定理 2 的证明.

由 $a(n)$ 的定义及引理 1 和引理 2 有:

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} d(a(n)) &= \sum_{r=1}^{M-1} \sum_{\frac{1}{2}r(r-1) < n \leqslant \frac{1}{2}r(r+1)} d(a(n)) + \sum_{\frac{1}{2}M(M-1)) < n \leqslant x} d(a(n)) \\ &= \sum_{r=1}^{M} rd(r) + O(M^{1+\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2}M^2 \ln M + BM^2 + O(M^{\frac{3}{2}+\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2}x\ln x + Cx + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon})\end{aligned}$$

其中, C 为一可计算的常数.

定理 3 的证明.

对于任意实数 $x \geqslant 1$, M 是一个确定的正整数, 满足 $\frac{M(M-1)}{2} < x \leqslant \frac{M(M+1)}{2}$, 根据 $a(n)$ 的定义有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} e_p(a(n)) &= \sum_{t=0}^{M-1} \sum_{\frac{t(t-1)}{2} < n \leqslant \frac{t(t+1)}{2}} e_p(a(n)) + \sum_{\frac{M(M-1)}{2} < n \leqslant x} e_p(a(n)) \\ &= \sum_{t=0}^{M-1} \left(\frac{t(t+1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2}\right) e_p(t) + \sum_{\frac{M(M-1)}{2} < n \leqslant x} e_p(M) \\ &= \sum_{t=1}^{M} te_p(t) + O\Big(\sum_{\frac{M(M-1)}{2} < n \leqslant \frac{M(M+1)}{2}} e_p(M)\Big) \\ &= \sum_{t=1}^{M} te_p(t) + O(Me_p(M)) \\ &= \sum_{t=1}^{M} te_p(t) + O(M\ln M)\end{aligned}$$

设 $A(y) = \sum_{t \leqslant y} e_p(t)$, 根据 Abel 恒等式[5], 则有

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{M} te_p(t) &= MA(M) - (k-1)\int_1^M A(y)\,dy \\ &= M\left(\frac{M}{p-1} + O(\ln^2 M)\right) - \int_1^M \left(\frac{y}{p-1} + O(\ln^2 y)\right)dy \\ &= \frac{1}{p-1}M^2 + O(M\ln^2 M) - \frac{M^2 - 1}{p-1} - \int_1^M O(\ln^2 y)\,dy \\ &= \frac{1}{2(p-1)}M^2 + \frac{1}{2(p-1)} + O(M\ln^2 M)\end{aligned}$$

因此, 由引理 1 及上式可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} e_p(a(n)) &= \frac{1}{2(p-1)}M^2 + \frac{1}{2(p-1)} + O(M\ln^2 M) \\ &= \frac{1}{p-1}x + O(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x).\end{aligned}$$

应用以上的证明方法, 我们还可以得出该数列与其他数论函数的混合均值, 例如:

(1) 对于任意给定的正实数 $x \geqslant 1$, $\varphi(n)$ 是 Euler 函数, 则有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(a(n)) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{2\sqrt{2} \times \ln 2}{\pi^2}x^{\frac{3}{2}} + O(x\ln x).$$

(2) 对任意实数 $x \geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \delta_k(a(n)) = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \prod_{p \mid k} \frac{p}{p+1} + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

其中 $\delta_k(n)$ 定义为:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} \max\{d \in N \mid d \mid n, (d,k) = 1\}, n \neq 0 \\ 0, n = 0 \end{cases}.$$

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Proposed Problems of Mathematics(Vol. II) [M]. U. S. M: Chişinău, 2010: 69.

[2] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 77 - 78.

[3] Subramaniam K B. A generalization of triangular numbers [J]. Internat J Math Ed Sci Tech, 1992, 23: 790 - 793.

[4] Yi Yuan. On the Triangle Numbers Complement and Its Asymptotic Properties [J]. Journal of Sangluo Teachers College, 2005, 19(2): 3 - 5.

[5] 王明军. 关于正整数的五边形数补数的性质 [J]. 天津师范大学学报, 2009, 29(3): 16 - 17.

[6] 杨存典. 关于五边形数的补数及其渐近性质 [J]. 西安工业学院学报, 2006, 26(3): 287 - 290.

[7] Lv Chuan. A Number Theoretic Function and its Mean Value. Research on Smarandache Problems in Number Theory, Hexis, 2004: 33 - 36.

A Smarandache Sequence and its Mean Value Properties

Wang Mingjun

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714000)

Abstract

For any positive integer n, let $\{a(n)\}$ denotes the natural sequence where each number n is repeated n times. Based on the general term formula, the mean value properties of $a(n)$, $d(a(n))$ and $e_p(a(n))$ are studied using the elementary method, and the asymptotic formule are obtained.

Key words: Hybrid function, Mean value, Asymptotic formula.