一个 Smarandache问题的均值估计

马新文

(琼州学院数学系, 海南 三亚 572022)

摘 要: 阐述了一个 Smarandache问题的均值估计, 并利用 Perron公式和留数定理, 给出了这个问题的一个渐近公式, 其余项可以做到 $O(x^{1/2})$.

关键词: 均值估计; Perron公式; 留数定理

中图分类号: O156 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008－6722(2009)02－0011－02

0 引言

F. Smarandache在文献 [1] 的问题 25中引入了函数 $P_d(n) := \prod_{d|n} d$. 这里, 定义了一个新的函数: $P_{ld}(n) := \prod_{\substack{d|n \\ d\equiv l \pmod q}} d$ (其中 l, q 为固定的数), 来研究 $\log P_{ld}(n)$ 的均值公式.

由于 $\log P_{ld}(n)$ 的生成函数为: $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log P_{ld}(n)}{n^s}=-\left(q^{-s}\zeta(s,l/q)\right)'\zeta(s)$

从而利用 Perron公式和留数定理, 可得到 $\sum_{n\le x}\log P_{ld}(n)$ 的一个渐近公式.

1 预备知识

引理 1.1 ([2] 第四章定理 1) 设 a_n 的生成函数为: $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$. 当 $\delta>1$ 时绝对收敛, $a_n\le A(n)$, 这里 $A(n)>0$ 为关于 n 的单调增函数, 且当 $\sigma\to 1+0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n^{-\sigma}=O((\sigma-1)^{-\alpha})$, $\alpha>0$

那么, 对于任意的 $b_0\ge b>1$, $T\ge 1$, $x=N+1/2$ 有公式:

$$\sum_{n\le x}a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right)$$

其中大 O常数仅依赖于 b_0

引理 1.2 ([3] 定理 7.4.1) $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{s-1}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\gamma_n}{n!}(s-1)^n$

其中 $\gamma_n=\lim_{N\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{(\log k)^n}{k}-\frac{(\log N)^{n+1}}{n+1}\right\}$, $n=1,2,\cdots$,

γ 为 Euler常数, γ, γ_n $(n=1,2,\cdots)$ 统称为 Stieltjes常数.

引理 1.3 ([3] 第七章习题 14)

$\zeta(s,a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda_n}{n!}(s-1)^n$, 其中 λ_n 为关于 a 的常数.

2 主要结果

定理 $\sum_{n\le x}\log P_{ld}(n)=\frac{1}{2q}x\log^2 x+\frac{\lambda-1}{q}x\log x+cx+O(x^{1/2})$, 其中 c 为关于 q, l 的常数.

收稿日期: 2009－02－23

作者简介: 马新文 (1981－), 男, 山东潍坊人, 琼州学院数学系助教, 硕士, 研究方向为解析数论.

证明：由于 $\log P_d(n)$ 的生成函数为：

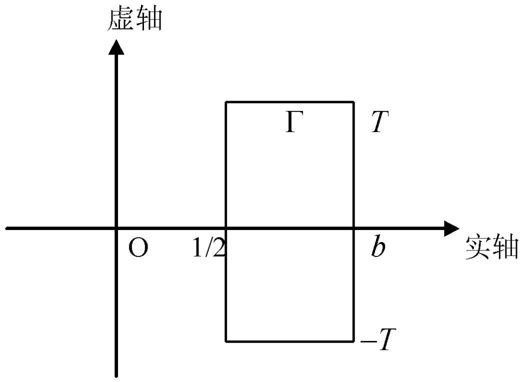
$$F(s)=-\left(q^{-s}\zeta(s,1/q)\right)'\zeta(s)=\zeta(s,1/q)\zeta(s)q^{-s}\log q-\zeta'(s,1/q)\zeta(s)q^{-s}$$

从而，由 Perron公式（引理 1.1），得：

$$\sum_{n\leq x}\log P_d(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F_1(s)\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}F_2(s)\,ds+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right)$$

其中 $2\leq T\leq x$，$b=1+\log^{-1}x$

$F_1(s)=\zeta(s,1/q)\zeta(s)(x/q)^s s^{-1}\log q$，$F_2(s)=-\zeta'(s,1/q)\zeta(s)(x/q)^s s^{-1}$



考虑如图所示的围道 Γ，在围道 Γ上应用留数定理得：（$F_1(s)$，$F_2(s)$在围道 Γ内只有一个极点 $s=1$）

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_1(s)\,ds=\frac{\log q}{q}x\log x+\frac{\log q}{q}x(-\log q-1+\gamma+\lambda_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F_2(s)\,ds=\frac{1}{2q}x\log^2x+\frac{\gamma-\log q-1}{q}x\log x+\frac{x}{q}\left(\frac{\log^2 q}{2}+\log q-\lambda_0\log q+1-\gamma-\gamma_1+\lambda_1\right)$$

从而，

$$\sum_{n\leq x}\log P_d(n)=\frac{1}{2q}x\log^2x+\frac{\gamma-1}{q}x\log x+cx+R+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right)$$

其中，c为关于 q 的常数，R是 $F_1(s)$，$F_2(s)$在围道 Γ的上、下和左三边上的积分.

利用 Zeta函数的阶的估计，易得：

$$R\ll\frac{1}{T}\int_{1/2}^{b}|\zeta(\sigma+iT)|^2x^\sigma d\sigma\log^2T+x^{1/2}\int_1^T|\zeta(1/2+it)|^2\frac{1}{t}dt\log^2T$$

$$\ll\frac{\log^2T}{T}\int_{1/2}^{b}T^{\frac{2(1-\sigma)}{3}}x^\sigma d\sigma+\frac{\log^2T}{T}x^{1/2}\int_1^T|\zeta(1/2+it)|^2dt\ll\left(\frac{x}{T}+x^{1/2}\right)\log^2T$$

从而，取 $T=x^{1/2}$，即得：$\sum_{n\leq x}\log P_d(n)=\frac{1}{2q}x\log^2x+\frac{\gamma-1}{q}x\log x+cx+O(x^{1/2}\log^2T)$

其中，c为关于 q 的常数，γ为 Euler常数.

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.

[2] 卡拉楚巴. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1984: 41－51.

[3] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1999: 137－156.

[4] Ma X W. The Asymptotic Formula of[J]. Scientia Magna, 2006, 2(2): 72－76.

The Mean Value of a Smarandache Problem

MA Xin-wen

(Department of Mathematics, Qiongzhou University, Sanya Hainan 572022, China)

Abstract: Discussed the mean value of a Smarandache problem, and obtained the asymptotic formula of this problem by using Perron formula and residue theorem.

Key words: mean value estimate; Perron formula; residue theorem