第 35 卷 第 1 期
2016 年 3 月

延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University(Natural Science Edition)

Vol. 35 No. 1
Mar. 2016

DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2016.01.006

一个关于 Smarandache LCM 对偶函数的方程

高 丽,马娅锋

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等数论和分类讨论的方法研究函数方程 $\prod_{d|n} SL^*(d)+l=2^{\omega(n)}$ 的可解性,并得到了它的所有正整数解的具体形式。

关键词: Smarandache LCM 对偶函数; $\omega(n)$ 函数; 正整数解

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2016)01-0006-02

1 引言与结论

对任意的正整数 n,著名的 Smarandache LCM 函数定义为:

$SL(n)=\min\{k \mid n\ [1,2,\cdots,k],k\in N_+\}$ [1]。

其对偶函数定义为:

$SL^*(n)=\max\{k \mid [1,2,\cdots,k] \mid n,k\in N_+\}$ [2]。

许多学者对 $SL^*(n)$ 的算术性质进行了研究,获得了不少有趣的结果(参见文献[3-6])。如,田呈亮在文献[3]中得到,当 n 为奇数时,$SL^*(n)=1$;当 n 为偶数时,$SL^*(n)\geqslant 2$。王妤在文献[4]中得到 $\sum_{d|n} SL^*(d)=\sum_{d|n} S^*(d)$ 的正整数解。

本文利用初等数论和分析的方法研究函数方程

$$\prod_{d|n} SL^*(d)+l=2^{\omega(n)} \qquad (1)$$

的可解性,并得到了它的所有的正整数解(其中 l 为正整数,$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,)。

定理 1 对任意的正整数 n,当 l 为偶数时,方程(1)无正整数解。

定理 2 对任意的正整数 n,当 $l=2^m-1$ 时,方程(1)有解,且解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$,其中 m 为正整数。

2 定理的证明

下面证明定理 1

由 $SL^*(n)$ 的定义可知,$n=1,2$ 不是方程(1)的正整数解。下面分两种情况讨论:

(1) 若 $n=p\geqslant 3$ 为素数,则 $\omega(n)=\omega(p)=1$。

$\prod_{d|n} SL^*(d)+l=SL^*(1)SL^*(p)+l=1+l$。

因为 l 为偶数,因此 $1+l$ 为奇数。且 $1+l>2$,因此 $n=p$ 为素数不是方程(1)的正整数解。

(2) 若 n 为合数,则分下列情况讨论:

1) 当 $n=2^\alpha,\alpha\geqslant 1$ 时,$\omega(n)=\omega(2^\alpha)=1$。

$\prod_{d|n} SL^*(d)+l$

$=SL^*(1)SL^*(2)\cdots SL^*(2^\alpha)+l=2^\alpha+l$。

由于 $2^\alpha+l>2$,因此 $n=2^\alpha$ 不是方程(1)的正整数解。

2) 当 $n=2^\alpha p^\beta,\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 1,p\geqslant 3$ 为素数时,

$\omega(n)=\omega(2^\alpha p^\beta)=2$。

$\prod_{d|2^\alpha p^\beta} SL^*(d)+l=\prod_{m=0}^{\alpha}\prod_{n=0}^{\beta} SL^*(2^m p^n)+l$

$=2^{\alpha+\beta}+l>4$。

因此 $n=2^\alpha p^\beta$ 不是方程(1)的正整数解。

收稿日期: 2015-11-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);陕西省教育厅科研计划项目(12JK0893);延安大学校级科研计划项目(YD2014-05);延安大学高水平大学建设项目(2012SXTS07)

作者简介: 高 丽(1966—),女,陕西绥德人,延安大学教授。

3) 当 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，

其中 $\alpha\geqslant1,\alpha_i\geqslant1,i=1,2,\cdots,k,k\geqslant1$。

$p_i\geqslant3$ 为互异的素数。

$\omega(n)=\omega(2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k+1$，

$$\prod_{d|2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}SL^*(d)+l$$

$$=\prod_{n=0}^{\alpha}\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\cdots\prod_{m_k}^{\alpha_k}SL^*(2^{n}p_1^{m_2}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+l$$

$$\geqslant2^{\alpha+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}+l\geqslant2^{\alpha+k\cdot1}+l\geqslant2^{k+l}>2^{k+1}。$$

因此 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(1)的正整数解。

4) 当 $n=p^{\alpha}$ 时 $\alpha>1,p\geqslant3$ 为素数。则

$\omega(n)=\omega(p^{\alpha})=1$，

$$\prod_{d|p^{\alpha}}SL^*(d)+l=\prod_{m=0}^{\alpha}SL^*(p^{m})+l=1+l>2。$$

因此 $n=p^{\alpha}$ 不是方程(1)的正整数解。

5) 当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，

$\alpha_i>1,3\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k,i=1,2,\cdots,k,k\geqslant2$。

$\omega(n)=\omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k$，

$$\prod_{d|2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}}SL^*(d)+l$$

$$=\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\prod_{m_2=0}^{\alpha_2}\cdots\prod_{m_k}^{\alpha_k}SL^*(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+l=1+l。$$

因为 $1+l$ 为奇数，而 2^{k} 是偶数。

因此 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(1)的正整数解。

定理 1 得证。

对于定理 2 的证明，在这里我们可以用定理 1 的方法来类同证明，具体步骤省略。

参考文献:

[1] 潘承洞，潘承彪．初等数论［M］．北京: 北京大学出版社，1992.

[2] 张文鹏，初等数论［M］．西安: 陕西师范大学出版社，2007.

[3] Tian chengliang. An equations involving the two Smarandache LCM dual function［J］. Scientia Magna，2007，3(3): 104－107.

[4] 王妤．一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程［J］．黑龙江大学学报，2008，25(5): 645－647.

[5] Smarandache F. Olny problems，not solutions［M］. chicago: xiquan publ. House，1993.

[6] 闫天国．关于 Smarandache LCM 对偶函数的一个方程［J］．西南民族大学学报，2013，39(4): 570－574.

［责任编辑　毕　伟］

An Equation of the Smarandache LCM Dual Function

GAO LI，MA Ya-feng

(College of Mathematics and Computer Science，Yan´an University，Yan´an 716000，China)

Abstract: By using the elementary number theory and classification discussion methods，the solvability of the equation $\prod_{d|n}SL^*(d)+l=2^{(\omega(n))}$ are studied，and its all specific forms of positive integer solution are given.

Key words: Smarandache dual LCM function; $\omega(n)$ function; positive integer solution