DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2011.12.005

一个包含 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程

蒋 硕

(西北大学 数学系，西安 710127)

摘 要：对于著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 以及 Euler 函数 $\varphi(n)$，在 n 为无平方因子数的条件下，利用初等方法研究了方程 $\sum_{d|n} S(d) = \varphi(n)$ 的可解性问题，并证明了不存在无平方因子数 n 满足该方程.

关键词：F. Smarandache 函数; Euler 函数; 无平方因子数; 方程的正整数解

中图分类号：O156 文献标志码：A 文章编号：1009—5128(2011)12—0017—03

收稿日期：2011—06—01

基金项目：陕西省教育厅科计划项目(2010JK538)

作者简介：蒋硕(1990—)，女，辽宁大连人，西北大学数学系美国留学基金硕士研究生.

0 引言及结论

对于任意正整数 n，著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|m!$，即就是 $S(n) = \min\{m: m \in N, n | m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义，人们很容易推断出，$S(1) = 1$，$S(2) = 2$，$S(3) = 3$，$S(4) = 4$，$S(5) = 5$，$S(6) = 3$，$S(7) = 7$，$S(8) = 4$，$S(9) = 6$，$S(10) = 5$，$S(11) = 11$，$S(12) = 4$，$S(13) = 13$，$S(14) = 7$，$S(15) = 5$，$S(16) = 6$，$S(17) = 17$，$S(18) = 6$，$S(19) = 19$，$S(20) = 5$，… 显然 F. Smarandache 函数的取值没有明显的规律性，也就是其值分布很不规则，因而这方面的研究工作很难取得实质性进展. 尽管如此，许多学者还是研究了它的性质，并得到了一系列重要的结果，参阅文献 [1-7]. 在文献 [8] 的问题二中，张文鹏教授建议我们研究方程

$$\sum_{d|n} S(d) = \varphi(n) \tag{1}$$

的可解性，并寻求该方程的所有正整数解，其中 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数. 关于这一问题，我不知至今是否已经彻底解决或者做出任何实质性进展，但是问题本身是有意义的，至少它能说明这两个函数在那些整数上的值相同.

本文利用初等方法研究了这一问题，在 n 为无平方因子数的条件下，也就是 n 的形式为 $n = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_k$ 的情况下，证明了方程 $\sum_{d|n} S(d) = \varphi(n)$ 无正整数解. 具体地说，也就是证明了下面的：

定理 方程(1)没有形如 $n = P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_k$ 的正整数解，其中 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 为不同的素数且满足

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_{k-1} < P_k.$$

1 定理的证明

在证明定理之前，我们先给出下面的

引理 如果 $n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_r^{a_r}$ 表示 n 的标准分解式，那么 $S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}\{S(P_i^{a_i})\}$.

下面我们将利用这一引理完成定理的证明.

在 n 为无平方因子数的条件下，方程(1)的左端

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S(d) &= S(1) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} S(P_i) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} S(P_i \cdot P_j) + \cdots + S(P_1 \cdot P_2 \cdot \cdots \cdot P_k) \\ &= 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} P_i + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} P_j + \cdots + P_k \\ &= 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} P_i + (P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \cdots + C_{k-1}^1 P_k) + (P_3 + 3P_4 + \cdots + C_{k-1}^2 P_k)\end{aligned}$$

$$+\cdots+C_{k-1}^{k-1}P_k$$
$$=1+P_1+2P_2+4P_3+8P_4+\cdots+(C_{i-1}^0+C_{i-1}^1+C_{i-1}^2+\cdots+C_{i-1}^{i-1})P_i$$
$$+\cdots+(C_{k-1}^0+C_{k-1}^1+C_{k-1}^2+\cdots+C_{k-1}^{k-1})P_k$$
$$=1+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k$$

由 Euler 函数的性质可知方程(1) 的右边为

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi(P_1\cdot P_2\cdot\cdots\cdot P_k)\\&=\varphi(P_1)\cdot\varphi(P_2)\cdot\cdots\cdot\varphi(P_i)\cdot\cdots\cdot\varphi(P_k)\\&=(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\end{aligned}$$

故为讨论方程 $\sum_{d|n}S(d)=\varphi(n)$ 的可解性,我们只需要研究等价方程

$$1+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k$$
$$=(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)$$ 的可解性.

首先容易证明 $P_1\neq 2$.

因为若 $P_1=2$,则方程(1) 的左端为

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}S(d)&=1+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k\\&=3+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k\end{aligned}$$

易见 $\sum_{d|n}S(d)$ 是一奇数.

而方程(1) 的右端为

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\\&=(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\end{aligned}$$

考虑到 $2<P_2<\cdots<P_{k-1}<P_k$,可知 $(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)$ 是一偶数. 显然矛盾,故 $P_1\neq 2$.

同样地可以证明 $P_1\neq 3$:

假设 $P_1=3$,方程(1) 的左端为

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}S(d)&=1+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k\\&=2(2+P_2+2P_3+2^2P_4+\cdots+2^{i-2}P_i+\cdots+2^{k-2}P_k)\end{aligned}$$

而方程(1) 的右端为

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\\&=2(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\end{aligned}$$

为使等式 $\sum_{d|n}S(d)=\varphi(n)$ 成立,必须满足

$$2+P_2+2P_3+2^2P_4+\cdots+2^{i-2}P_i+\cdots+2^{k-2}P_k=(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)$$

在 $3<P_2<\cdots<P_{k-1}<P_k$ 的情形下,$2+P_2+2P_3+2^2P_4+\cdots+2^{k-2}P$ 为一奇数,而 $(P_2-1)\cdots(P_i-1)\cdots(P_k-1)$ 是一偶数.

显然矛盾,故 $P_1\neq 3$.

至此,我们得到 P_1 应满足 $P_1\geqslant 5$.

现在考虑方程

$$1+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k$$
$$=(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)$$ 的可解性.

不妨先从 k 的取值情况着手.

当 $k=1$ 时,

原方程化简为 $1+P_1=P_1-1$. 显然在这种情况下,此方程无解.

当 $k=2$ 时,

原方程为 $1+P_1+2P_2=(P_1-1)\cdot(P_2-1)$，即 $2P_1+3P_2=P_1P_2$

由 $P_1\geqslant 5$，可知 $P_1P_2\geqslant 5P_2$

但根据假设有 $2P_1+3P_2<5P_2$，故当 $k=2$ 时，方程亦无解.

下面讨论 $k\geqslant 3$ 的情形：

此时，原方程等价于

$$\begin{aligned}1&+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k\\&=(P_1-1)(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)\end{aligned}$$

等式左端

$$\begin{aligned}1&+P_1+2P_2+2^2P_3+2^3P_4+\cdots+2^{i-1}P_i+\cdots+2^{k-1}P_k\\&<P_k(1+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{i-1}+\cdots+2^{k-1})\\&=P_k\cdot 2^k\end{aligned}$$

对于 $1\leqslant j\leqslant k$，P_j 均满足 $P_j-1\geqslant 4$，故等式右端

$(P_1-1)\cdot(P_2-1)\cdot\cdots\cdot(P_i-1)\cdot\cdots\cdot(P_k-1)>4^{k-1}(P_k-1)=2^{2(k-1)}(P_k-1)$

若等式成立，就有 $2^{2(k-1)}(P_k-1)<P_k\cdot 2^k$，即 $\dfrac{P_k-1}{P_k}<\dfrac{2^k}{2^{2(k-1)}}=2^{2-k}$

由 $k\geqslant 3$ 可知 $2^{2-k}\leqslant 2^{-1}$，则 $\dfrac{P_k-1}{P_k}<\dfrac{1}{2}$

求解可得 $0<P_k<2$. 而这与上述讨论的结果 $P_k>P_{k-1}>\cdots>P_2>P_1\geqslant 5$ 矛盾，故等式不成立.

结合以上情况我们完成定理的证明，即方程 $\sum\limits_{d|n}S(d)=\varphi(n)$ 没有形如 $n=P_1\cdot P_2\cdot\cdots\cdot P_k$ 的正整数解，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 为满足 $P_1<P_2<\cdots<P_{k-1}<P_k$ 的素数.

参考文献：

[1] 郭晓艳，袁霞. 关于问题研究的新进展 [M]. Ann Arbor: High American Press，2010.
[2] 杨长恩. 关于函数的两个方程 [J]. 纯粹数学与应用数学，2010，(3)：387－390.
[3] 温田丁. 函数的一个下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学，2006，(3)：413－416.
[4] Only Problems. Not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House，1993.
[5] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.
[6] Le Maohua. Two function equations [J]. Notions Journal，2004，14(1)：121－124.
[7] R. K. Guy. Unsolved problems in number theory [M]. New York: Springer Verlag，2004.
[8] 张文鹏，李海龙. 初等数论 [M]. 西安：陕西师范大学出版社，2009.

【责任编辑　舒尚奇】

An Equation about the Smarandache Function and the Euler Function

JIANG Shuo
(Department of Mathematics，Northwest University，Xi'an 710127，China)

Abstract: For the famous function and the function $\varphi(n)$，under the condition of letting n be a quadratic-free number，the solvability of the equation $\sum_{d|n}S(d)=\varphi(n)$ is discussed. The inexistence of such n is proved by applying an elementary method.

Key words: F. Smarandache function; Euler function; quadratic-free number; positive integer solution of the equation