一个包含 Smarandache函数的复合函数①

吴启斌

(咸阳师范学院数学系,陕西 咸阳 712000)

摘 要: 对任意正整数 n,著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m使得 $n|m!$,或者 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in \mathbf{N}\}$.而函数 $Z(n)$定义为最小的正整数 k使得 $n\leqslant k(k+1)/2$,即就是 $Z(n)=\min\{k: n\leqslant k(k+1)/2\}$.本文的主要目的是利用初等及解析方法研究复合函数 $S(Z(n))$的均值,并给出一个较强的渐近公式.

关 键 词: Smarandache函数;复合函数;均值;渐近公式

中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1008-5513(2007)04-0463-04

1 引言及结论

对于任意正整数 n,我们定义函数 $S(n)$为最小的正整数 m使得 $n|m!$.即就是 $S(n)=\min\{m: m\in \mathbf{N}, n|m!\}$.而函数 $Z(n)$定义为最小的正整数 k使得 $n\leqslant k(k+1)/2$,即就是 $Z(n)=\min\{k: n\leqslant k(k+1)/2\}$.通常我们称函数 $S(n)$为 Smarandache函数,它是美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache教授在文 [1]中提出的,并建议人们研究它的各种性质.而函数 $Z(n)$是罗马尼亚著名数论专家 Jozsef Sandor教授在文 [2-3]中引入的,同时研究了它的各种初等性质,获得了一系列结果.从函数 $S(n)$的定义,我们很容易推断出如果 $n=p_1^{T_1}p_2^{T_2}\cdots p_k^{T_k}$是 n的标准素因数分解式,那么

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{T_i})\} \tag{1}$$

例如: $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, S(9)=6, S(10)=5,\cdots\cdots$.关于 $S(n)$的算术性质,有许多学者进行过研究,获得了不少有重要理论价值的研究成果.例如,文 [4]研究了 Smarandache函数的有界性问题,得出了函数 $S(p^T)$的上下界估计.即就是证明了

$$(p-1)T+1\leqslant S(p^T)\leqslant (p-1)[T+1+\log_p T]+1$$

文 [5]研究了 $S(n)$的均值性质,给出了该函数均值的一个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S(n)=\frac{\pi^2x^2}{12\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

① 收稿日期: 2006-12-21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155).
作者简介: 吴启斌(1956-),副教授,研究方向: 初等几何.

文[6]研究了 $S(n)$ 的值分布问题，获得了下面更深刻的结果：

设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子，则对任意实数 $x>1$，我们有渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta-函数。

此外，文[7]研究了一个包含 $S(n)$ 的方程的可解性，证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$，方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$。

后来，几位作者对文[7]作了推广和延伸，如文[3]进一步证实对任意正整数 $k\geqslant 2$，存在无限多组正整数 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

同样又存在无限多组正整数 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 使得

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

文[8]还证明了更强的结论：即就是如果正整数 k 和 m 满足下面三个条件之一：

(a) $k>2$ 和 $m\geqslant 1$ 均为奇数；

(b) $k\geqslant 5$ 为奇数，$m\geqslant 2$ 为偶数；

(c) 任意偶数 $k\geqslant 4$ 和任意正整数 m，

那么方程 $m\cdot S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$，有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$。

同时文[8]还提出，对任意正整数 k 及 $m\geqslant 2$，是否存在无限多组正整数 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 满足方程 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=m\cdot(S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k))$。

本文的主要目的是研究复合函数 $S(Z(n))$ 的均值问题。关于这一内容，至今似乎没有人进行研究，甚至也不知道它的主项是什么？本文利用初等及解析方法首次研究了这一问题，并给出一个较强的渐近公式。具体地说也就是证明下面的：

定理 设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数。则对任意实数 $x>1$，我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln 2x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i 2x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $c_i\ (i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

特别当 $k=1$ 时我们有下面更简单的：

推论 对任意实数 $x>1$，我们有渐近公式 $\sum_{n\leqslant x}S(Z(n))=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln 2x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$.

2 定理的证明

这节我们用初等及解析方法直接给出定理的证明。事实上在和式

$$\sum_{n\leqslant x} S(Z(n)) \tag{2}$$

中,注重到如果 $Z(n)=m$,那么当 $(m-1)m/2+1\leqslant n\leqslant m(m+1)/2$时都有 $Z(n)=m$.也就是说方程 $Z(n)=m$有 m个解 $n=\frac{(m-1)m}{2}+1,\frac{(m-1)m}{2}+2,\cdots,\frac{m(m+1)}{2}$.由于 $n\leqslant x$,所以由文 [2]知当 $Z(n)=m$时,m满足 $1\leqslant m\leqslant \frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$.于是注意到 $S(n)\leqslant n$我们有

$$\sum_{n\leqslant x} S(Z(n))=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ Z(n)=m}} S(m)=\sum_{m\leqslant \frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}} m\cdot S(m)+O(x)=\sum_{m\leqslant\sqrt{2x}} m\cdot S(m)+O(x) \tag{3}$$

现在我们将所有整数 $1\leqslant m\leqslant\sqrt{2x}$分为两个集合 A与 B,其中集合 A包含所有那些满足存在素数 p使得 $p|m$且 $p>\sqrt{m}$的正整数 m;而集合 B包含区间 $[1,\sqrt{2x}]$中不属于集合 A的那些正整数.于是利用性质 (1)我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} m\cdot S(m)&=\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{2x}\\ p|m,\ \sqrt{m}<p}} m\cdot S(m)=\sum_{\substack{mp\leqslant\sqrt{2x}\\ m<p}} mp\cdot S(mp)\\ &=\sum_{\substack{mp\leqslant\sqrt{2x}\\ m<p}} mp\cdot p=\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{2x}} m\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2\end{aligned} \tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$.于是利用 Abel求和公式 (参阅文 [9]中定理 4.2)、分部积分法以及素数定理 (参阅文 [10]第三章定理 2) $\pi(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$.

其中 $c_i\,(i=1,2,\cdots,k)$为常数且 $c_1=1$.我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m<p\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{m}} p^2&=\frac{2x}{m^2}\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2x}}{m}\right)-m^2\cdot\pi(m)-\int_m^{\frac{\sqrt{2x}}{m}}2y\cdot\pi(y)\,dy\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^3\cdot\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

其中 a_i为可计算的常数.于是注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$,并结合 (4)及 (5)式可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} S(Z(n))&=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{2x}}\frac{1}{m^2}+\sum_{m\leqslant\sqrt[4]{2x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\cdot\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\\ &=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

其中 b_i为可计算的常数.

现在我们讨论集合 B中的情况,由 (1)式及集合 B的定义知对任意 $m\in B$,当 m的标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$时,我们有

$$S(m)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i p_i\}\leqslant\sqrt{m}\cdot\ln m \tag{7}$$

于是由 (7)式我们有:

$$\sum_{m\in B} m\cdot S(m)\leqslant\sum_{m\in B} m\cdot\sqrt{m}\cdot\ln m\leqslant\sum_{m\leqslant\sqrt{2x}} m^{\frac{3}{2}}\cdot\ln m\leqslant x^{\frac{5}{4}}\ln x \tag{8}$$

由集合 A 及 B 的定义并结合(3),(6)及(8)式我们有

$$\sum_{n\leqslant x} S(Z(n)) = \sum_{m\leqslant \sqrt{2x}} m\cdot S(m) + O(x) = \sum_{n\in A} m\cdot S(m) + \sum_{n\in B} m\cdot S(m) + O(x)$$

$$= \frac{\pi^2}{18}\cdot \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i\cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $b_i\ (i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数.于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 78-80.

[3] Jozsef Sandor. On additive analogues of certain arithmetical function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(1): 128-132.

[4] Farris Mark, Mitchell Patrick. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

[5] Wang Yongxing. Research on Smarandache Problem in Number Theory[M]. Phoenix, USA: Hexis, 2005.

[6] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布性质[J].数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[7] Liu Yaming. On the solutions of an equation involing the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[8] Fu Jing. An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(4): 83-86.

[9] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[10] 潘承洞,潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海:上海科学技术出版社, 1988.

A composite function involving the Smarandache function

WU Qibin

(Department of Mathematics, Xianyang Normal College, Xianyang 712000, China)

Abstract For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n \mid m!$, or $S(n) = \min\{m : n \mid m!, n\in \mathbf{N}\}$. And the function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n\leqslant k(k+1)/2$. That is, $Z(n) = \min\{k : n\leqslant k(k+1)/2, k\in \mathbf{N}\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods and the analytic methods to study the mean value properties of the compostie function $S(Z(n))$, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words Smarandache function, composite function, mean value, asymptotic formula

2000 MSC 11B83