第50卷第5期 数学学报中文版 Vol.50, No.5
2007年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sep., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)05-1185-06 **文献标识码:** A

一个包含 Smarandache 函数的方程

马金萍

西安财经学院统计学院 西安 710061
西北大学数学系 西安 710069
E-mail: jinping-1018@163.com.cn

刘宝利

西北大学数学系 西安 710069
西安航空职业技术学院 西安 710089

摘 要 对于任意正整数 n, 我们用 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数, 即 $S(n)=\min\{m: n\,|\,m!\}$. 本文的主要目的是运用初等方法研究方程 $\sum_{d\,|\,n} S(d)=n$ 的可解性, 并给出它的所有正整数解.

关键词 Smarandache 函数; 方程; 正整数解
MR(2000) 主题分类 11B83
中图分类 O156.4

An Equation Involving the Smarandache Function

Jin Ping MA

School of statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061, P. R. China
Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, P. R. China
E-mail: jinping-1018@163.com.cn

Bao Li LIU

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, P. R. China
Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Xi'an 710089, P. R. China

Abstract For any positive integer n, let $S(n)$ denotes the Smarandache function, that is, $S(n)=\min\{m: n\,|\,m!\}$. In this paper, we use the elementary methods to study the solutions of the equation $\sum_{d\,|\,n} S(d)=n$, and give its all positive integer solutions.

Keywords Smarandache function; equation; solutions
MR(2000) Subject Classification 11B83
Chinese Library Classification O156.4

1 引言与结果

对于任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m: n\,|\,m!\}$. 例如

$$S(1)=1,\quad S(2)=2,\quad S(3)=3,\quad S(4)=4,\quad S(5)=5,\quad S(6)=3,\ldots.$$

收稿日期: 2006-11-12; 接受日期: 2007-06-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671155)

从 $S(n)$ 的定义和性质, 我们很容易推断, 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, 则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

关于 $S(n)$ 的算术性质, 有许多学者进行过研究, 并且获得不少有趣的结论. 例如徐哲峰博士在文献 [1] 中研究了 Smarandache 函数的一类均值性质, 获得了一个有趣的均值定理, 即就是证明了

$$\sum_{n\le x}(S(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta- 函数, $p(n)$ 表示 n 的最大素因子.

王永兴在文献 [2] 中研究了函数 $\frac{S(n)}{n}$ 的均值, 得出了一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\le x}\frac{S(n)}{n}=\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

此外, 本文第一作者还在文献 [3] 中研究了包含 Smarandache 函数的方程 $S(n)=\phi(n)$ 的正整数解的问题, 并得到了完全解决. 即方程 $S(n)=\phi(n)$ 有且仅有五个正整数解, 依次为

$$n=1,8,9,12,18,$$

其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数.

对于 Smarandache 函数的求和式 $\sum_{d\,|\,n}S(d)$, 我们不难发现: 当 n 为素数 p 时, 有不等式 $\sum_{d\,|\,n}S(d)>n$; 而当 $n=p^2$ ($p>3$ 为素数) 时, 有 $\sum_{d\,|\,n}S(d)<n$. 于是很自然地想到, 对于哪些自然数 n, 会有方程 $\sum_{d\,|\,n}S(d)=n$ 成立? 最近张文鹏教授建议我们研究这一方程的可解性, 并求出其所有正整数解.

本文主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并获得彻底解决, 即就是证明下面的定理.

定理 对任意正整数 n, 方程

$$\sum_{d|n}S(d)=n$$

成立当且仅当 $n=1,\ 28$.

2 几个引理

为了完成定理的证明, 我们需要几个简单引理.

引理 1 方程 $\sum_{d\,|\,n}S(d)=n$ 没有 $n=p^\alpha$ 形式的正整数解, 这里 p 为素数, α为任意正整数.

证明 我们用反证法进行证明. 假定方程 $\sum_{d\,|\,n}S(d)=n$ 有 $n=p^\alpha$ 形式的正整数解, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{d\,|\,n}S(d)&=\sum_{d\,|\,p^\alpha}S(d)\\&=1+S(p)+S(p^2)+S(p^3)+\cdots+S(p^\alpha)\\&=1+p+2p+S(p^3)+\cdots+S(p^\alpha)=p^\alpha.\end{aligned}$$

注意到对任意正整数 β 有 $p\,|\,S(p^\beta)$. 从上式等号右边可以看出 $p\,|\,p^\alpha$, 而左边从第二项开始均有 $p\,|\,S(p^\beta)$, 从而推出 $p\,|\,1$, 与 $p\dagger 1$ 矛盾. 所以方程 $\sum_{d\,|\,n}S(d)=n$ 没有 $n=p^\alpha$ 形式的正整数解. 这样就完成了引理 1 的证明.

引理 2 设 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2\le p_1<p_2<\cdots<p_k)$ 是 n 的标准素因数分解式, 则方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 有解的必要条件为 $\alpha_1\ge 2$ 且 $k\ge 2$.

证明 当 $k=1$ 时, 由引理 1 知该方程无解. 于是若该方程有解则必有 $k\ge 2$.

此时假定 $\alpha_1=1$, 即 $n=p_1{p_2}^{\alpha_2}\cdots {p_k}^{\alpha_k}=p_1m$ 且 $(p_1,m)=1$, 注意到对任意 $p\mid m$, $p>1$, 有 $S(p_1p)=S(p)$, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}S(d)&=\sum_{d_1\mid p_1}\sum_{d_2\mid m}S(d_1d_2)=\sum_{d_2\mid m}S(d_2)+\sum_{d_2\mid m}S(p_1d_2)\\&=\sum_{d_2\mid m}S(d_2)+S(p_1)+\sum_{\substack{d_2\mid m\\d_2>1}}S(p_1d_2)\\&=\sum_{d_2\mid m}S(d_2)+S(p_1)+\sum_{\substack{d_2\mid m\\d_2>1}}S(d_2)\\&=2\sum_{d_2\mid m}S(d_2)+p_1-1\neq p_1m.\end{aligned}$$

这是因为 $p_1=2$ 时, 上式左边为奇数, 而右边为偶数; $p_1>2$ 时, 上式左边为偶数, 而右边为奇数. 所以, 要使方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 成立必须 $\alpha_1\ge 2$ 且 $k\ge 2$. 于是完成了引理 2 的证明.

引理 3 当 $n\ge 8$ 时, $\frac{n}{d(n)}\ge 2$, 这里 $d(n)$ 为除数函数.

证明 设 $n\ge 8$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准素因数分解式. 注意到 $\frac{p^\alpha}{\alpha+1}\ge 1$; 当 $\alpha>1$, $p\ge 3$ 时

$$\frac{p^\alpha}{\alpha+1}>\frac{2^\alpha}{\alpha+1}\ge 2;$$

当 $\alpha\ge 3$ 时

$$\frac{p^\alpha}{\alpha+1}\ge\frac{2^\alpha}{\alpha+1}\ge 2.$$

所以我们分以下几种情况来进行讨论:

(i) 如果有一个 $\alpha_i\ge 3$ $(1\le i\le k)$, 则有

$$\frac{n}{d(n)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{2^3}{3+1}=2.$$

(ii) 如果 $\max_{1\le i\le k}\{\alpha_i\}=\alpha_j=2$, 则当 $p_j\ge 3$ 时, 有

$$\frac{n}{d(n)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{3^2}{2+1}>2.$$

而当 $p_j=2$ 时, n 至少有两个不同的素因子, 于是有

$$\frac{n}{d(n)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{{p_i}^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\ge\frac{2^2}{2+1}\cdot\frac{3}{1+1}=2.$$

(iii) 如果 $\alpha_i=1$ $(i=1,2,\ldots,k)$, 则 n (≥ 8) 至少有一个素因子 ≥ 5, 于是

$$\frac{n}{d(n)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1+1}\ge\frac{5}{2}\ge 2.$$

结合以上情况立刻完成引理 3 的证明.

3 定理的证明

这节将利用初等方法来完成定理的证明. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2\le p_1<p_2<\cdots<p_k)$ 表示 n 的标准素因数分解式. 从 $S(n)$ 的定义容易看出 $n=1$ 是方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 的一个解. 当 $n>1$ 时, 我们分下列两种情况讨论:

(I) 如果 $k=1$ 即 $n=p^\alpha$, 由引理 1, 该方程没有这种形式的解.

(II) 如果 $k\ge 2$, 当 $\alpha_1=1$ 时, 由引理 2, n 不是该方程的解.

当 $\alpha_1\ge 2$ 时, 由 $S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}:=S(p^\alpha)$, 可设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=p^\alpha m$ 且 $(m,p)=1$.

如果 $m\ge 8$, 且 $n=mp^\alpha$ 满足方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=mp^\alpha$, 那么我们有

$$\begin{aligned}mp^\alpha=\sum_{d\mid mp^\alpha}S(d)&<\sum_{d\mid mp^\alpha}S(p^\alpha)\\&<S(p^\alpha)d(mp^\alpha)=S(p^\alpha)d(p^\alpha)d(m)=S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m),\end{aligned}$$

即就是有下列不等式

$$\frac{S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m)}{mp^\alpha}>1.$$

我们用到了除数函数 $d(n)$ 的性质, 它是一个可乘函数. 由引理 3, 当 $m\ge 8$ 时, $\frac{m}{d(m)}\ge 2$; 又 $\alpha\ge 3$ 时, 由 $S(n)$ 的性质, 有 $S(p^\alpha)\le\alpha p$, 所以上述不等式即为

$$1<\frac{S(p^\alpha)(\alpha+1)d(m)}{mp^\alpha}\le\frac{\alpha(\alpha+1)p}{2p^\alpha}.$$

而当 $\alpha\ge 4$ 或者 $\alpha\ge 3$, $p\ge 3$ 时, 不等式 $2p^\alpha<\alpha(\alpha+1)p$ 是不可能的. 从而我们可以得出结论: 当 $m\ge 8$ 时, 此方程无解.

下面我们来讨论 $m=2,3,4,5,6,7$ 时, 方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$ 的解的情况:

当 $m=2$ 即 $n=2p^\alpha$ $(p\ge 3)$ 时, 由引理 2 知 $n=2p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $m=3$ 即 $n=3p^\alpha$ 时, 若 $p>3$, 由引理 2 知 $n=3p^\alpha$ 不是该方程的解. 当 $p=2$ 即 $n=3\cdot 2^\alpha$ 时, 这时 $\alpha\ge 2$. 显然 $n=12$ 不满足方程 $\sum_{d\mid n}S(d)=n$. 于是若 n 满足该方程, 则必须有 $\alpha\ge 3$, 那么

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 3\cdot 2^\alpha}S(d)=\sum_{d\mid 2^\alpha}S(d)+\sum_{d\mid 2^\alpha}S(3d)=2\sum_{d\mid 2^\alpha}S(d)+3\ne 3\cdot 2^\alpha.$$

结合上述两种情况可以得出 $n=3p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $m=4$ 时, 即 $n=4p^\alpha$ $(p\ge 3,\ \alpha\ge 2)$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 4p^\alpha}S(d)&=\sum_{d\mid p^\alpha}S(d)+\sum_{d\mid p^\alpha}S(2d)+\sum_{d\mid p^\alpha}S(4d)\\&=\begin{cases}3\sum\limits_{d\mid p^\alpha}S(d)+4=4p^\alpha, & p\ge 5;\\ 3\sum\limits_{d\mid 3^\alpha}S(d)+5\ne 4\cdot 3^\alpha, & p=3.\end{cases}\end{aligned}$$

在这里, 当 $p \ge 5$ 时, 有

$$3\sum_{\substack{d\,|\,p^\alpha\\ d>1}} S(d)+7=4p^\alpha.$$

上式中

$$p\Big|\sum_{\substack{d\,|\,p^\alpha\\ d>1}} S(d),\quad p\,|\,p^\alpha,$$

所以 $p\,|\,7$, 从而 $p=7$, 也就是说 $n=4\cdot 7=28$ 是方程的解.

当 $m=5$ 即 $n=5p^\alpha$ 时, 若 $p>5$ 时, 由引理 2 知 $n=5p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $p=2$ 即 $n=5\cdot 2^\alpha$ 时, 这时 $\alpha \ge 4$. 此时由于

$$4\nmid 2+2\sum_{\substack{d\,|\,2^\alpha\\ d>1}} S(d)+8,$$

所以

$$\sum_{d\,|\,n} S(d)=\sum_{d\,|\,5\cdot 2^\alpha} S(d)=\sum_{d\,|\,2^\alpha} S(d)+\sum_{d\,|\,2^\alpha} S(5d)=2\sum_{d\,|\,2^\alpha} S(d)+9\ne 5\cdot 2^\alpha.$$

在这里, 当 $p=3$ 即 $n=5\cdot 3^\alpha$ 时, 这时 $\alpha\ge 2$. 显然 $n=45$ 不满足方程 $\sum_{d\,|\,n} S(d)=n$. 于是同样若 n 满足该方程, 则必须有 $\alpha \ge 3$, 此时由于

$$3\nmid 2+2\sum_{\substack{d\,|\,3^\alpha\\ d>1}} S(d)+6,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{d\,|\,n} S(d)&=\sum_{d\,|\,5\cdot 3^\alpha} S(d)=\sum_{d\,|\,3^\alpha} S(d)+\sum_{d\,|\,3^\alpha} S(5d)=2\sum_{d\,|\,3^\alpha} S(d)+6\\ &=2+2\sum_{\substack{d\,|\,3^\alpha\\ d>1}} S(d)+6\ne 5\cdot 3^\alpha,\end{aligned}$$

从而就可以得出 $n=5p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $m=6$ 时, 即 $n=6p^\alpha=2\cdot 3\cdot p^\alpha$, 由引理 2 立刻知 $n=6p^\alpha$ 不是方程的解.

当 $m=7$ 即 $n=7\cdot p^\alpha$ 时, 同样若 $p>7$ 时, 由引理 2 知 $n=7p^\alpha$ 不是该方程的解.

当 $p=2$ 即 $n=7\cdot 2^\alpha$ 时, 这时 $\alpha\ge 5$. 于是有

$$7\cdot 2^\alpha=\sum_{d\,|\,7\cdot 2^\alpha} S(d)<\sum_{d\,|\,7\cdot 2^\alpha} S(2^\alpha)=S(2^\alpha)d(7\cdot 2^\alpha)<4\alpha(\alpha+1),$$

用归纳法很容易证明当 $\alpha\ge 3$ 时, 不等式 $7\cdot 2^{\alpha-2}<\alpha(\alpha+1)$ 是不可能的.

当 $p=3$ 即 $n=7\cdot 3^\alpha$ 时, 这时 $\alpha\ge 3$. 于是有

$$\sum_{d\,|\,n} S(d)=\sum_{d\,|\,7\cdot 3^\alpha} S(d)<\sum_{d\,|\,7\cdot 3^\alpha} S(3^\alpha)=S(3^\alpha)d(7\cdot 3^\alpha)\le 3\alpha\cdot 2(\alpha+1).$$

显然当 $\alpha\ge 3$ 时, 不等式 $7\cdot 3^\alpha<6\alpha(\alpha+1)$ 是不可能的. 所以 $n=7\cdot 3^\alpha$ 不是原方程的解.

当 $p=5$ 即 $n=7\cdot 5^\alpha$ 时, 这时 $\alpha\geq 2$. 于是有

$$\sum_{d\mid n}S(d)=\sum_{d\mid 7\cdot 5^\alpha}S(d)=\sum_{d\mid 5^\alpha}S(d)+\sum_{d\mid 5^\alpha}S(7d)=2\sum_{d\mid 5^\alpha}S(d)+8\neq 7\cdot 5^\alpha.$$

结合上述各种情况就可以得出 $n=7p^\alpha$ 不是该方程的解.

现在通过 (I) 和 (II) 的讨论, 我们立刻得到方程

$$\sum_{d\mid n}S(d)=n$$

有且仅有两个解. 它们是 $n=1,\ 28$.

于是完成了定理的证明.

参考文献

[1] Xu Z. F., On the value distribution of the Smarandache function, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(5): 1009–1012.

[2] Wang Y. X., On the Smaranache function, Research on Smaranache Problems in Number Theory Collected papers, Edited by Zhang Wenpeng, America: Hexis, 2004: 103–106.

[3] Ma J. P., An equation involving the Smarandache function, *Scientia Magna*, 2005, **2**: 89–90.

[4] Tom M. A., Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976.

[5] Pan C. D., Pan C. B., Foundation of analytic number theory, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).

[6] Xu Z. F., On the mean value of the Smarandache power function, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(1): 77–80.