DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2010.03.002

第 27 卷 第 3 期 2010 年 6 月
黑龙江大学自然科学学报
JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY
Vol. 27 No. 3 June, 2010

一个包含 Smarandache 函数的混合均值

刘 华, 崔文霞

(商丘师范学院 数学系, 商丘 476000)

摘 要: 研究著名的 Smarandache 函数 $V(n)$ 与最小素因子函数 $p(n)$,利用素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann Zeta 函数的解析性质,通过分区间讨论的方法研究了 $V(n)p(n)$ 的均值性质,并结合解析的方法估计了均值中的余项,得到一个渐近公式: $\sum\limits_{n\leqslant x}V(n)p(n)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{x^3a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$。

关键词: Smarandache 函数; Riemann Zeta 函数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-7011(2010)03-0354-03

0 引言及结论

对于任意正整数 n,Smarandache 函数 $\overline{\Omega(n)}=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_rp_r$,其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$。类似的,Smarandache 函数 $V(n)$ 定义为: $V(1)=1$,当 $n>1$ 时,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式,则 $V(n)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\alpha_3p_3,\cdots,\alpha_rp_r\}$ 很容易可以证明,$V(n)$ 是可乘函数,另外 $p(n)$ 为关于 n 的最小素因子函数,对于 $\overline{\Omega(n)}$,$V(n)$ 和 $p(n)$,许多学者进行研究,获得了一系列较好的结果。例如薛社教[1]研究了 $\overline{\Omega(n)}$ 函数的一个级数分布性质,并给出了一个恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\Omega(n)}}{n^s}=\zeta(s)\frac{\sum\limits_p\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\sum\limits_p\frac{1}{p^s}}$$

沈虹[2]用 $p(n)$ 去逼近函数 $V(n)$ 得到一个渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $p(n)$ 为最小素因子函数 $c_i(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为常数。Chen Jianbin[3]利用初等的方法证明了,对任意实数 $x>1$,有:

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-p(n))^2=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{2}{5}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

并且贺艳峰[4]研究了 $V(n)$ 与 $U(n)=\max\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\alpha_3p_3,\cdots,\alpha_rp_r\}$ 这两个数论函数的混合均值,并取得了很好的结果。

本文借鉴以上作者的方法,结合素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann Zeta 函数 $\zeta(s)$ 的解析性质,通过分类讨论的方法研究了一个包含 Smarandache 函数的加权均值,并给出了它的一个混合均值,即:

定理 设 $n\geqslant1$ 为正整数,则有下面的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)p(n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{x^3a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

收稿日期: 2009-03-15

基金项目: 河南省科技厅自然科学研究计划项目(092300410141)

作者简介: 刘 华(1982-),女,助教,主要研究方向: 数论,E-mail: liuhua0408@126.com

1 引　理

为了完成定理的证明,需要下面两个引理:

引理 1　设 x 为 $\geqslant 1$ 的实数,则有:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

其中 $b_i = (i-1)!$。

证明　参见文献 [5] 的 §3.1 的定理 3.2。

引理 2　设 p 是素数,则有:

$$\sum_{p \leqslant x} p^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

证明　由引理 [1] 及文献 [6] 中 Abel 恒等式得

$$\sum_{n \leqslant x} p^2 = x^2 \pi(x) - 2\int_{\frac{3}{2}}^{x} y\pi(y)\,\mathrm{d}y = x^2\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)\right) - 2\int_{\frac{3}{2}}^{x} y\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i y}{\ln^i y} + O\left(\frac{y}{\ln^{k+1} y}\right)\right)\mathrm{d}y$$

$$= x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x}{\ln^k x} - \frac{2}{3} x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right) = \frac{1}{3} x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)。 \tag{1}$$

2 定理的证明

下面证明定理。对任意的正整数 $n \geqslant 1$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,将区间 [1, x] 分成两个集合 A 与 B 即:

A: $W(n) = 1$,即是所有 $p^\alpha \leqslant x$ 的集合,其中 p 是素数,α 是任意正整数;

B: $W(n) \geqslant 2$ 其中 $W(n)$ 表示 n 的所有不同的素因子的个数。

则由集合 A 和 B 的定义,有

$$\sum_{n \leqslant x} V(n) p(n) = \sum_{n \in A} V(n) p(n) + \sum_{n \in B} V(n) p(n)。$$

下面计算当 $n \in A$ 的情况。当 $n \in A$ 时 $n = p^\alpha$, $V(n) = \alpha p$ 所以有

$$\sum_{n \in A} V(n) p(n) = \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha p^2 = \sum_{p \leqslant x} p^2 + \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \alpha \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{2}}} p^2, \tag{2}$$

由 Abel 求和公式以及素数定理可得

$$\sum_{n \leqslant x} p^2 = x^2 \pi(x) - 2\int_{1}^{x} y\pi(y)\,\mathrm{d}y = x^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i x}{\ln^k x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right) = \frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)。 \tag{3}$$

这里 $c_i = (2, 3, 4, \cdots, k)$ 是常数且 $c_i = 1$。

同理有

$$\sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha p^2 \leqslant \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \sum_{p \leqslant x^{\frac{1}{2}}} \alpha p^2 \ll \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \ln x} \alpha \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} \ll x \cdot \pi(x^{\frac{1}{2}}) \ln^2 x = x \cdot \ln^2 x \cdot \frac{c_1 x^{\frac{1}{2}}}{\ln x} \ll x^{\frac{3}{2}} \ln x。 \tag{4}$$

结合(2)、(3)、(4)得

$$\sum_{n \in A} V(n) p(n) = \frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)$$

当 $n \in B$ 时对于 $n \in B$ 设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,则 $s \geqslant 2$,当 $\alpha_1 = 1$ 时 $V(n) = p(n) = p_1$ 当 $\alpha_1 \geqslant 2$ 时 $V(n) \leqslant \alpha_1 p_1$, $p(n) = p_1$ 于是

$$\sum_{n \in B} V(n) p(n) = \sum_{\alpha_1 = 1, p_1 \leqslant \frac{x}{m}} p_1^2 + \sum_{p_1^{\alpha} m \leqslant x \alpha \geqslant 2, p(m) \geqslant p_1} \alpha_1 p_1 \cdot p_1。 \tag{5}$$

又因为

$$\sum_{\alpha_1 = 1, p_1 m < x} p_1^2 = \sum_{2 \leqslant p_1 \leqslant \frac{x}{m}} p_1^2 = \frac{1}{3} \frac{x^3}{m^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{d_i x^3 \ln^i m}{m^3 \ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)。 \tag{6}$$

而

$$\sum_{p_1^{\alpha}m\leqslant x,\alpha\leqslant 2,p(m)>p_1}\alpha p_1 \ll \sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p_1\leqslant x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\sum_{p_1\leqslant m\leqslant\frac{x}{p_1^{\alpha}}}\alpha p_1^2 \ll \sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p_1\leqslant x\frac{1}{\alpha+1}}\alpha p_1^2\cdot\frac{x}{p_1^{\alpha}3} \ll \sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha x\cdot x^{\frac{1}{3}} \ll x^{\frac{4}{3}}\cdot\ln^2 x。 \tag{7}$$

结合(5),(6),(7)可以得到:

$$\sum_{n\in B}V(n)p(n) = \sum_{i=1}^{k}\frac{d_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{l+1}x}\right)$$

从而

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)p(n) = \sum_{n\in A}V(n)p(n) + \sum_{n\in B}V(n)p(n) = \frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^3}{\ln^i x} + \sum_{i=1}^{k}\frac{d_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 a_i 为可计算的常数。结合以上各种情况就完成了定理的证明。

参考文献

[1] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 351 - 354.

[2] 沈 虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235 - 238.

[3] CHEN Jian-bin. Value distribution of the F Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15 - 18.

[4] 贺艳峰. 两个数论函数的混合均值[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(4): 477 - 479.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[6] TOM M A. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[7] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

One hybrid mean value formula involving Smarandache function

LIU Hua, CUI Wen-xia

(Department of Mathematics, Shangqiu Normal College, Shangqiu 476000, China)

Abstract: The famous Smarandache function $V(n)$ and the smallest prime divisor function $p(n)$ are considered. By using the analytic properties of the prime function $\pi(x)$ and Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and dividing interval, the mean value property of $V(n)p(n)$ is studied, and the remainder term of the mean value is estimated by combining the analytic methods, and thereby, an interesting asymptotic formula is obtained as follows:

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)p(n) = \sum_{i=1}^{k}\frac{x^3 a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

Key words: Smarandache function; Riemann Zeta-function; mean value; asymptotic formula