第 32 卷 第 1 期
2013 年 3 月
延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University(Natural Science Edition)
Vol. 32 No. 1
Mar. 2013

DOI: 10.3969/J. ISSN. 1004 - 602X. 2013. 01. 008

一个包含 Smarandache 函数的混合均值

彭 娟,郭金保,李 波,拓小泉

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 对任意 $n\in N_+$,著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,即 $SL(n)=\min\{k: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$。本文利用初等和解析的方法研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 和除数函数 $\sigma(n)$ 的混合均值,并给出了一个较强的渐近公式。

关键词: F. Smarandache 函数; 除数函数; 混合均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004 - 602X(2013)01 - 0008 - 03

对任意 $n\in N_+$,Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k,使得

$n\mid[1,2,\cdots,k]$。

其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示$(1,2,\cdots,k)$ 的最小公倍数。即就是

$SL(n)=\min\{k: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$。

例如:

$SL(1)=1$,$SL(2)=2$,$SL(3)=3$,$SL(4)=4$,$SL(5)=5$,$SL(6)=3$,$SL(7)=7$,$SL(8)=8$,$\cdots$,$SL(997)=997$,$SL(998)=499$,$SL(999)=37$,$SL(1000)=15$,$\cdots$。

对于任意正整数 $n>1$,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_i^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式,由 $SL(n)$ 的定义易推出

$$SL(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i^{\alpha_i}\} \tag{1}$$

特别地,$SL(p^\alpha)=p^\alpha$。

关于 $SL(n)$ 的性质,有许多学者进行了研究,获得了一系列较好的结果。例如,在文 [2] 中研究了对于任意的素数 p,有 $SL(p)=S(p)=p$,这里的 $S(n)$ 是 F. Smarandache 函数,即就是 $S(n)=\min\{m: n\mid m!, m\in N_+\}$。在文 [3] 中还研究了 $SL(n)$ 的均值性质,给出了该函数均值的一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

在文 [4] 中研究了当 $n=12$ 或者 $SL(n)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p$ 时有 $SL(n)=S(n)$,$S(n)\neq n$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k,p$ 表示不同的素数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是满足 $p>p_i^{\alpha_i}$,$i=1,2,\cdots,k$ 的正整数。

此外,陈建斌在文 [5] 中利用初等的方法研究了 $SL(n)$ 的均值分布性质,得到了下面一个重要的结果。

设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,则当 $x>1$,$x>R$ 时,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))=\frac{2}{5}\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta 函数。

沈虹在文 [6] 用 $p(n)$ 去逼近函数 $V(n)$ 得到一个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则 $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots,\alpha_kp_k\}$,$p(n)$ 为最小素因子函数 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

本文主要是利用初等和解析的方法,并结合素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann Zeta - 函数 $\zeta(s)$ 的解析性质,研究了一个包含 Smarandache 函数和 Dirichlet 除数函数 $\sigma(n)$ 的混合均值问题,并给出了一个较强的渐

收稿日期: 2012 - 12 - 14
基金项目: 延安大学研究生教育创新计划项目
作者简介: 彭 娟(1987—),女,陕西丹凤人,延安大学在读硕士研究生。

近公式,即就是

定理 1　设 $k \geqslant 2$ 为给定的正整数,则对任意实数 $x > 1$, $x \in R$ 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(n)\sigma(n) = \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

其中 $\sigma(n)$ 为 Dirichlet 除数函数,即 n 的所有正因子个数 $\sigma(n) = \sum^{d \mid n} 1$, $c_i(i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数。

1　两个简单的引理

为了完成定理的证明,我们需要下面两个简单的引理:

引理 1　设 $x > 1$ 是实数,则有

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)。$$

证明　参阅文 [7] 定理 3.2。

引理 2　对任一数论函数 $a(n)$,令 $A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$,其中,当 $x < 1$ 时, $A(x) = 0$,假设 f 在区间 $[y, x]$ 有连续导函数,其中 $0 < y < x$,则有

$$\sum_{y < n \leqslant x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t。$$

证明:见参考文献 [8]。

如果我们熟悉 Riemann – Stieltjes 积分就可以得到引理的更简单的证明。因为 $A(x)$ 是一个阶梯函数,而函数 $f(n)$ 在每一个整数 n 上跳跃,所以引理 2 的和能表示为 Riemann – Stieltjes 积分

$$\sum_{y < x \leqslant x} a(n) f(n) = \int_y^x f(t)\, dA(t)。$$

由分部积分得

$$\sum_{y < n \leqslant x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t)\, \mathrm{d}f(t) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) \mathrm{d}t。$$

2　定理的证明

在这部分,我们用初等及解析的方法直接给出定理的证明,事实上在和式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(n)\sigma(n) \tag{2}$$

中,将区间 $[1, x]$ 的正整数集分为两个集合 A 和 B,其中集合 A 包含所有那些满足素数 p 使得 $p \mid n$ 且 $p > \sqrt{n}$ 的正整数;而集合 B 包含所有那些在区间 $[1, x]$ 中不属于集合 A 的正整数。

除数函数 $\sigma(n)$ 是可乘函数,结合(1)式及集合 A 的定义有

$$\sum_{n \in A} SL(n)\sigma(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x, p \mid n \\ p > \sqrt{n}}} SL(n)\sigma(n) = \sum_{\substack{np \leqslant x \\ n < p}} SL(np)\sigma(np) = \sum_{\substack{np \leqslant x \\ n < p}} 2p\sigma(n) = \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} 2\sigma(n) \sum_{n < p \leqslant x/n} p。$$

再利用引理 1(素数定理)和引理 2(Abel 恒等式)得

$$\sum_{n < p \leqslant x/n} p = \pi\left(\frac{x}{n}\right)\frac{x}{n} - n\pi(n) - \int_n^{\frac{x}{n}} \pi(t) \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2n^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^2 \ln^i x}{n^2 \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \ln^{k+1} x}\right),$$

其中 a_i 为可计算常数。

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{及} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36},$$

结合引理 1 和引理 2 可得

$$\sum_{n \leqslant x} SL(n)\sigma(n) = \frac{x^2}{\ln x} \cdot \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{\sigma(n)}{n^2} + \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \sum_{i=2}^{k} \frac{2a_i x^2 \ln^i x}{n^2 \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right) = \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)。 \tag{3}$$

其中 b_i 为可计算常数。

现在讨论集合 B 中的情况,由(1)式及集合 B 的定义知对任意的 $n \in B$,当 n 的标准分解为 $n = p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,有两种情况 $SL(n) = p_k \leqslant \sqrt{n}$ 或

$$SL(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{p_i^{\alpha_i}\} = p_i^{\alpha_i}, \alpha \geqslant 2。$$

因此我们分析有

$$\sum_{n \leqslant B} SL(n)\sigma(n) \leqslant \sum_{np \leqslant x} d(n)\sqrt{np} + \sum_{\substack{np^{\alpha} \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} (a+1) d(n) p^{\alpha} \leqslant \sum_{n \in B} \sigma(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \leqslant x^{3/2} \ln^2 x。 \tag{4}$$

其中用到渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = x \cdot \ln x + O(x)。$$

由集合 A 及 B 的定义结合式(2),(3)及(4)式,我们有

$$\sum_{n \leqslant x} SL(n)\sigma(n) = \sum_{n \in A} SL(n)\sigma(n) + \sum_{n \in B} SL(n)\sigma(n)$$

$$=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算常数，于是完成了定理的证明。

参考文献:

[1] F. Smarandache . Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.

[2] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001,12: 307 – 309.

[3] Lü Zhongtian . On the F. Smarandache LCM function and its mean value. Scientia Magna,2007; 3(1): 22 – 25.

[4] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function. Smarandache Notions Journal,2004,14: 186 – 188.

[5] Chen jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function. Scientia Magna,2007; 3(2): 15 – 18.

[6] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007,23(2): 235 – 238.

[7] 潘承洞,潘成彪. 素数定理的证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.

[8] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer – Verlag, 1976.

[责任编辑 贺小林]

A Hybrid Mean Value Formula Involing Smarandache Function

PENG JUAN, GUO Jin-bao, LI BO, TUO Xiao-quan

(College of Mathematics and Computer Science, Yan an University, Yan an 71600, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous F. Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n \mid [1,2,\cdots,k]$. That is, $SL(n)=\min\{k: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$. The elementary and analytical methods are used to study the hybrid mean value formula involing Smarandache function and the Dirichlet divisor function, and a sharp asymptotic formula is given for it.

Key words: Smarandache function; dirichlet divisor function; hybrid mean value; asymptotic formula

(上接第7页)

Optimization of Semi-E-Fuzzy-Valued Functions

BAI Yu-juan, WANG Xin-xin, ZHANG Li-li

(College of Mathematics and Statistics, Long Dong University, Qingyang 745000, China)

Abstract: Based on the new ordering of fuzzy numbers, the definition of the semi – E-preinvex fuzzy-valued function is given, the global optimal solution of fuzzy mathematical programming problem is discussed.

Key words: fuzzy number; semi-E-preinvexity; fuzzy optimization