第 39 卷第 1 期 郑州大学学报(理学版) Vol 39 No 1
2007 年 3 月 J. of Zhengzhou Univ. (Nat. Sci. Ed.) Mar 2007

一个包含 Smarandache 函数的混合均值

马金萍

(西北大学数学系 西安 710069)

摘要: 对于任意正整数 n, 用 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数, $L(n)$ 表示不大于 n 的所有正整数的最小公倍数. 运用初等方法研究函数 $S(L(n))$ 的均值性质, 并给出一个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache 函数; 最小公倍数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O 156.4 文章编号: 1671－6841(2007)01－0031－02

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 被定义为能够使得 $n|m!$ 成立的最小正整数 m, 即 $S(n)=\min\{m\in N: n|m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义和性质我们很容易推断, 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准素因数分解式, 则有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \tag{1}$$

当然也不难推断, 对于素数 p 有 $S(p)=p$, 并且除 $n=4$ 和 $n=p$ 外有 $S(n)<n$. 因此下列关系式显而易见

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right],$$

其中, $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数, $[x]$ 为不大于 x 的最大整数.

另外, 我们定义函数 $L(n)$ 为不大于 n 的所有正整数的最小公倍数, 即 $L(n)=[1, 2, \cdots, n]$.

关于 $S(n)$ 的算术性质, 已有一些研究结果[1-3]. 但是关于复合函数 $S(L(n))$ 的性质, 还未见有人研究. 本文利用初等方法研究函数 $S(L(n))$ 的均值性质, 并得出一个有趣的渐近公式.

引理[4] 设 p_n 表示第 n 个素数, $d_n=p_{n+1}-p_n$, 则有估计式

$$\sum_{p_n\leqslant x}d_n^2\ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon},$$

其中, ε 表示任意给定的正数.

定理 对任意实数 $x\geqslant 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(L(n))=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right),$$

其中, ε 表示任意给定的正数.

证明 设 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ 为 $L(n)$ 的标准素因数分解式, 考虑到当 $\sqrt{n}<p_i\leqslant n$ 时, $\beta_i=\beta(p_i)=1$. 所以有

$$L(n)=[1, 2, \cdots, n]=p_1^{\beta(p_1)}p_2^{\beta(p_2)}\cdots p_s^{\beta(p_s)}=\prod_{p\leqslant\sqrt{n}}p^{\beta(p)}\prod_{\sqrt{n}<p\leqslant n}p.$$

由于 $p_i^{\beta(p_i)}\leqslant n$, 所以对较大的 n, 注意到 $\frac{n}{2}\leqslant p_{\pi(n)}\leqslant n$, 所以当 $\beta(p_i)\geqslant 2$ 时, 由函数 $S(n)$ 的定义及性质有

$$S(p_i^{\beta(p_i)})\leqslant\beta(p_i)p_i\leqslant\beta(p_i)\sqrt{n}\leqslant\sqrt{n}\ln n\leqslant p_{\pi(n)},$$

因此结合(1)式, 推出当 n 较大时函数 $S(L(n))$ 满足

$$S(L(n))=\max\{S(p_1^{\beta_1}), S(p_2^{\beta_2}), \cdots, S(p_s^{\beta_s})\}=p_{\pi(n)}.$$

从而有

收稿日期: 2006-05-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目, 编号 60472068.

作者简介: 马金萍(1970—), 女, 硕士, 主要从事数论研究, E-mail: jinping-1018@163.com.

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}S(L(n)) &= \sum_{n\leqslant x}p_{\pi(n)}+O(1)\\ &= \sum_{p_1\leqslant n<p_2}p_{\pi(n)}+\sum_{p_2\leqslant n<p_3}p_{\pi(n)}+\cdots+\sum_{p_{\pi(x)}\leqslant n<x}p_{\pi(n)}+O(1)\\ &= p_1(p_2-p_1)+p_2(p_3-p_2)+\cdots+p_{\pi(x)}(x-p_{\pi(x)})+O(1)\\ &= -\frac{1}{2}(p_2-p_1)^2+\frac{1}{2}p_2^2-\frac{1}{2}p_1^2-\frac{1}{2}(p_3-p_2)^2+\frac{1}{2}p_3^2-\frac{1}{2}p_2^2\\ &\quad -\cdots-\frac{1}{2}(x-p_{\pi(x)})^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}p_{\pi(x)}^2+O(1)\\ &= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sum_{p_n\leqslant x}(p_{n+1}-p_n)^2+O(1).\end{aligned}$$

结合引理及上式我们立刻推出

$$\sum_{n\leqslant x}S(L(n))=\frac{1}{2}x^2+O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right).$$

定理证毕.

参考文献:

[1] Wang Yongxing. On the Smarandache function[C] //Research on Smarandache Problems in Number Theory. Hexis, 2005: 103-106.

[2] Ma Jinping. The Smarandache multiplicative function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(1): 125-128.

[3] Li Hailong, Zhao Xiaopeng. On the Smarandache function and the k-th roots of a positive integer[C] //Research on Smarandache Problems in Number Theory. Hexis, 2004: 119-122

[4] Heath-Brown D R. The differences between consecutive primes(III)[J]. J London Math Soc, 1979, 20(2): 177-178.

[5] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

A Hybrid Mean Value Involving the Smarandache Function

MA Jin-ping
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: For any positive integer n, let $S(n)$ denote the Smarandache function, and $L(n)$ be the least common multiple of all positive integers not exceeding n. The mean value property of $S(L(n))$ is studied, and an interesting asymptotic formula for its mean value is obtained.

Key words: Smarandache function; least common multiple; mean value; asymptotic formula