西 安 工 程 大 学 学 报
Journal of Xi'an Polytechnic University
第 30 卷第 6 期(总 142 期) 2016 年 12 月 Vol.30,No.6(Sum.No.142)

文章编号:1674-649X(2016)06-0869-08 DOI:10.13338/j.issn.1674-649x.2016.06.026

一个包含 Smarandache 原函数与六边形数的方程

高晓梅,杨　海,候　静

(西安工程大学 理学院,陕西 西安 710048)

摘要:设 p 为素数,n 为任意的正整数,Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 表示最小的正整数 k,使得 $p^n \mid k!$,即 $S_p(n)=\min\{k\in N: p^n \mid k!\}$.利用初等数论方法研究方程 $S_p(1)+S_p(6)+S_p(15)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)$ 的可解性,并给出该方程的所有正整数解.

关键词:Smarandache 原函数;六边形数;可解性;正整数解
中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

An equation involving the Smarandache primitive function and hexagonal numbers

GAO Xiaomei, *YANG Hai*, *HOU Jing*

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: For any positive integer n, let p be a prime, the Smarandache primitive function $S_p(n)$ means the smallest positive integer k such that $p^n \mid k!$, that is $S_p(n)=\min\{k\in N: p^n \mid k!\}$. By using the elementary number theory method, the solvability of the equation $S_p(1)+S_p(6)+S_p(15)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)$ is studied, and all positive integer solutions for this equation are given.

Key words: Smarandache primitive function; hexagonal numbers; solutions; positive integer solutions

1 引言及结论

设 p 为素数,n 为任意的正整数,Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 $p^n \mid k!$,即

收稿日期:2016-10-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11226038,11371012);陕西省教育厅专项基金(14JK1311).
通讯作者:杨海(1979—),男,陕西省府谷县人,西安工程大学副教授,博士,研究方向为数论及其应用.
E-mail:xpuyhai@163.com

引文格式:高晓梅,杨海,候静.一个包含 Smarandache 原函数与六边形数的方程[J].西安工程大学学报,2016,30(6):869-876.
GAO Xiaomei, YANG Hai, HOU Jing. An equation involving the Smarandache primitive function and hexagonal numbers[J].Journal of Xi'an Polytechnic University,2016,30(6):869-876.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$S_p(n)=\min\{k\in N:p^n\mid k!\}$. 例如 $S_2(1)=2,S_2(2)=S_2(3)=4,S_2(4)=6,\cdots$ 在文献[1]中的第47,48和49个问题中,Smarandache教授建议研究函数 $S_p(n)$ 的性质. 为了方便起见,称函数 $S_p(n)$ 为Smarandache原函数. Smarandache原函数 $S_p(n)$ 与著名的Smarandache函数 $S(n)$ 之间有着非常紧密的联系,这里 $S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}$.由 $S(n)$ 的定义容易得到 $S(p)=p$,且当 $n\neq 4,n\neq p$ 时,$S(n)<n$,因此有

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right].$$

其中,$\pi(x)$ 表示小于 x 的素数的个数.

Smarandache函数 $S(n)$,Smarandache原函数 $S_p(n)$ 以及关于Smarandache原函数方程的研究是数论中一个重要课题,因此许多学者对此有研究[2-10]. 张文鹏等[2] 给出了 $S_p(n)$ 一个有趣的渐近公式,即对任意给定的素数 p 和任意的正整数 n,有

$$S_p(n)=(p-1)n+O\left(\frac{p}{\ln p}.\ln n\right).$$

李洁[11] 研究了方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

的可解性,并给出其所有正整数解,它们是 $n=1,2,\cdots,\left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right]$,这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 文献[12-14]研究了包含一类自然数乘积之和、平方和、立方和分别与Smarandache原函数的方程可解性问题,给出这些方程的全部正整数解.但是由于素数分布的不规律性,随着幂次的增加,这类方程的求解就愈发困难.之后,付瑞琴[15]、杨海[16] 分别将Smarandache原函数和Fibonacci数、Lucas数相结合,运用初等数论方法研究了两类方程的可解性,并给出其全部正整数解.

六边形数是指能排成正六边形的多边形数.第 n 个六边形数可以用 $h_n=n(2n-1)$ 求得.其前十项为1,6,15,28,45,66,91,120,153,190.每一个六边形数都是三角形数.第 n 个六边形数同时是第 $(2n-1)$ 个三角形数.1830年勒让德证明了任何大于1791的整数都能表达成最多4个六边形数之和.设 M_p 是一个梅森素数,那么 M_p 与 h_n 之间存在关系式

$$M_p2^{p-1}=M_p(M_p+1)/2=h_{(M_p+1)/2}=h_{2p-1}.$$

对于奇完美数所知甚少,目前可知每一个偶完美数都是六边形数.使用sigma求和方法可以将第 n 个六边形数表示为 $h_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(4i+1)$.

本文运用初等方法研究包含Smarandache原函数与六边形数的方程

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

的可解性,并给出其所有正整数解.即证明

定理1　令 p 为给定的素数,n 为任意的正整数,则方程

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

仅有有限个正整数解,即

(1) 当 $p=2$ 时,方程仅有一个解 $n=1$;

(2) 当 p 为3,7,17或19时,方程的解为 $n=1,2$;

(3) 当 p 为5或11时,方程的解为 $n=1,2,3$;

(4) 当 $p=13$ 时,方程的解为 $n=1,2,3,4,5$;

(5) 当 $p\geqslant 23$ 时,方程的解为 $n=1,2,\cdots,n_p$.

其中:$n_p=\left[\sqrt[3]{\frac{48p-3}{64}+\sqrt{\left(\frac{3-48p}{64}\right)^2-\left(\frac{7}{48}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{48p-3}{64}-\sqrt{\left(\frac{3-48p}{64}\right)^2-\left(\frac{7}{48}\right)^3}}-\frac{1}{4}\right]$.

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

2　几个引理

引理 1　设 p 为一个素数,n 为任意正整数,$S_p(n)$ 表示 Smarandache 原函数,则有

$$S_p(k)=\begin{cases}=pk, k\leqslant p,\\ <pk, k>p.\end{cases}$$

证明　参阅文献[17].

引理 2　设 p 为一个素数,n 为任意正整数,再设 $\alpha=\alpha(p,n)$,若 n 和 p 满足 $p^{\alpha}\,||\,n!$,那么 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^i}\right]$.

证明　参阅文献[18].

引理 3　设 p 为一个素数,n 为任意正整数,则一定存在正整数 m_k 满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(2k-1)(k=1,2,\cdots,n)$,使得

$$S_p(1)=m_1p, S_p(6)=m_2p,\cdots,S_p(n(2n-1))=m_np,$$

并且 $k(2k-1)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{m_kp}{p^i}\right]$.

证明　可由 $S_p(n)$ 的定义,以及引理 1 和引理 2 的结论,得到此引理的结论.

3　定理 1 的证明

对于方程

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right),$$

(Ⅰ) 当 $p=2$ 时,方程则变为

$$S_2(1)+S_2(6)+\cdots+S_2(n(2n-1))=S_2\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

(a) 当 $n=1$ 时,因为 $S_2(1)=2=S_2\left(\dfrac{4+3-1}{6}\right)$,所以 $n=1$ 是方程的解;

(b) 当 $n=2$ 时,因为 $S_2(1)+S_2(6)=2+8>S_2(7)=8$,所以 $n=2$ 不是方程的解;

(c) 当 $n\geqslant 3$ 时,则存在正整数 m_k 满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(2k-1),(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$S_2(1)=2m_1, S_2(6)=2m_2,\cdots,S_2(n(2n-1))=2m_n,$$

并且 $k(2k-1)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{m_kp}{p^i}\right](k=1,2,\cdots,n)$.

于是有

$$S_2(1)+S_2(6)+\cdots+S_2(n(2n-1))=2(m_1+m_2+\cdots+m_n).$$

另一方面,注意到 $m_1=1, m_2=4$,根据引理 3 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{2^i}\right]=\\&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+1}{2^i}\right]=\\&m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+1}{2^i}\right]\geqslant\\&m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{2(m_1+m_2-1)+1}{2^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_3+m_4+\cdots+m_n}{2^i}\right]\geqslant\\&m_1+(m_2+2)+\left(m_3+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_3}{2^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{2^i}\right]\right)\geqslant\\&1+6+\cdots+n(2n-1)=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}.\end{aligned}$$

根据引理 2 可得

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

$$2^{(4n^3+3n^2-n)/6} \mid (2(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

因此

$$S_2\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right) \leqslant 2(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1 < 2(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$

$$S_2(1)+S_2(6)+\cdots+S_2(n(2n-1)).$$

综上所述,当 $p=2$ 时,方程的解为 $n=1$.

(Ⅱ) 当 $p=3$ 时,方程则变为

$$S_3(1)+S_3(6)+\cdots+S_3(n(2n-1))=S_3\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

(a) 当 $n=1$ 时,$S_3(1)=3=S_3\left(\frac{4+3-1}{6}\right)$,所以 $n=1$ 是方程的解;

(b) 当 $n=2$ 时,$S_3(1)+S_3(6)=3+15=S_3(7)$,所以 $n=2$ 也是方程的解;

(c) 当 $n=3$ 时,$S_3(1)+S_3(6)+S_3(15)=3+15+33>S_3(22)$,所以 $n=3$ 不是方程的解;

(d) 当 $n\geqslant 4$ 时,则存在正整数 m_k 满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(2k-1)$,$(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$S_3(1)=3m_1,S_3(6)=3m_2,\cdots,S_3(n(2n-1))=3m_n,$$

并且 $k(2k-1)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_k p}{p^i}\right](k=1,2,\cdots,n)$.

从而

$$S_3(1)+S_3(6)+\cdots+S_3(n(2n-1))=3(m_1+m_2+\cdots+m_n).$$

另一方面,注意到 $m_1=1,m_2=5,m_3=11$,根据引理3可得:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{3(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{3^i}\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{3(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+2}{3^i}\right]=$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{3(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+2}{3^i}\right]\geqslant$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{3(m_1+m_2+m_3-1)+2}{3^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_4+m_5+\cdots+m_n}{3^i}\right]\geqslant$$

$$m_1+(m_2+1)+(m_3+4)+\left(m_4+\left[\frac{m_4}{3^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\left[\frac{m_n}{3^i}\right]\right)\geqslant$$

$$1+6+15+\cdots+(n(2n-1))=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}.$$

根据引理2可得

$$3^{(4n^3+3n^2-n)/6} \mid (3(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

从而

$$S_3\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)\leqslant 3(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1<$$

$$3(m_1+m_2+\cdots+m_n)=S_3(1)+S_3(2)+\cdots+S_3(n(2n-1)).$$

综上所述,当 $p=3$ 时,方程的解为 $n=1,2$.当 $p=7,17,19$ 时,利用类似的方法可推出 $n=1,2$ 是方程的解.

(Ⅲ) 当 $p=5$ 时,方程则变为

$$S_5(1)+S_5(6)+\cdots+S_5(n(2n-1))=S_5\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

(a) 当 $n=1$ 时,$S_5(1)=5=S_5\left(\frac{4+3-1}{6}\right)$,故 $n=1$ 是方程的解;

(b) 当 $n=2$ 时,$S_5(1)+S_5(6)=5+25=S_5(7)$,故 $n=2$ 是方程的解;

(c) 当 $n=3$ 时,$S_5(1)+S_5(6)+S_5(15)=5+25+65=S_5(22)$,故 $n=3$ 也是方程的解;

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(d) 当 $n=4$ 时,$S_5(1)+S_5(6)+S_5(15)+S_5(28)=95+120>S_5(50)$,故 $n=4$ 不是方程的解;

(e) 当 $n\geqslant 5$ 时,则存在正整数 m_k 满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(2k-1)$,$(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$S_5(1)=5m_1,S_5(6)=5m_2,\cdots,S_5(n(2n-1))=5m_n,$$

并且 $k(2k-1)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_k p}{p^i}\right](k=1,2,\cdots,n)$

从而

$$S_5(1)+S_5(6)+\cdots+S_5(n(2n-1))=5(m_1+m_2+\cdots+m_n).$$

另一方面,注意到 $m_1=1,m_2=5,m_3=13,m_4=24$ 根据引理 3 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{5^i}\right]=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+4}{5^i}\right]=$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+4}{5^i}\right]\geqslant$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{5(m_1+m_2+m_3+m_4-1)+4}{5^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_5+m_6+\cdots+m_n}{5^i}\right]\geqslant$$

$$m_1+(m_2+1)+(m_3+2)+(m_4+4)+\left(m_5+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_5}{5^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{5^i}\right]\right)\geqslant$$

$$1+6+15+28+\cdots+(n(2n-1))=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}.$$

根据引理 2 得

$$5^{(4n^3+3n^2-n)/6}\mid(5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

从而

$$S_5\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)\leqslant 5(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1<5(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$

$$S_5(1)+S_5(6)+\cdots+S_5(n(2n-1)).$$

综上所述,当 $p=5$ 时,方程的解为 $n=1,2,3$.当 $p=11$ 时,利用同样的方法可推出 $n=1,2,3$ 是方程的解.

(Ⅳ) 当 $p=13$ 时,方程则变为

$$S_{13}(1)+S_{13}(6)+\cdots+S_{13}(n(2n-1))=S_{13}\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

(a) 当 $n=1$ 时,$S_{13}(1)=13=S_{13}\left(\frac{4+3-1}{6}\right)$,故 $n=1$ 是方程的解;

(b) 当 $n=2$ 时,$S_{13}(1)+S_{13}(6)=13+78=S_{13}(7)$,故 $n=2$ 是方程的解;

(c) 当 $n=3$ 时,$S_{13}(1)+S_{13}(6)+S_{13}(15)=91+182=S_{13}(22)$,故 $n=3$ 是方程的解;

(d) 当 $n=4$ 时,$S_{13}(1)+S_{13}(6)+S_{13}(15)+S_{13}(28)=273+338=S_{13}(50)$,故 $n=4$ 是方程的解;

(e) 当 $n=5$ 时,$S_{13}(1)+S_{13}(6)+S_{13}(15)+S_{13}(28)+S_{13}(45)=611+546=S_{13}(95)$,故 $n=5$ 也是方程的解;

(f) 当 $n=6$ 时,

$$S_{13}(1)+S_{13}(6)+S_{13}(15)+S_{13}(28)+S_{13}(45)+S_{13}(66)=1963>S_{13}(161).$$

故 $n=6$ 不是方程的解;

(g) 当 $n\geqslant 7$ 时,则存在正整数 m_k 满足 $1\leqslant m_k\leqslant k(2k-1)$,$(k=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$S_{13}(1)=13m_1,S_{13}(6)=13m_2,\cdots,S_{13}(n(2n-1))=13m_n,$$

并且 $k(2k-1)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_k p}{p^i}\right](k=1,2,\cdots,n)$.

从而

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$S_{13}(1)+S_{13}(6)+\cdots+S_{13}(n(2n-1))=13(m_1+m_2+\cdots m_n).$$

另一方面,注意到 $m_1=1,m_2=6,m_3=14,m_4=26,m_5=42,m_6=62$,根据引理 3 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{13(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{13^i}\right]=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{13(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+12}{13^i}\right]=$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{13(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+12}{13^i}\right]\geqslant$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{13(m_1+m_2+\cdots+m_6-1)+12}{13^i}\right]+$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_7+m_8+\cdots+m_n}{13^i}\right]\geqslant$$
$$m_1+m_2+(m_3+1)+(m_4+2)+(m_5+3)+(m_6+4)+$$
$$\left(m_7+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_7}{13^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{13^i}\right]\right)\geqslant$$
$$1+6+15+\cdots+(n(2n-1))=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}.$$

根据引理 2 可得

$$13^{\frac{4n3+3n2-n}{6}}\mid(13(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

从而

$$S_{13}\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)\leqslant 13(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1<$$
$$13(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$
$$S_{13}(1)+S_{13}(6)+..+S_{13}(n(2n-1)).$$

综上所述,当 $p=13$ 时,方程的解为 $n=1,2,3,4,5$.

(V) 当 $p\geqslant 23$ 时,方程则变为

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1))=S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

(a) 当$\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\leqslant p$,解这个不等式可得 $1\leqslant n\leqslant n_p$,其中

$$n_p=\left[\sqrt[3]{\frac{48p-3}{64}+\sqrt{\left(\frac{3-48p}{64}\right)^2-\left(\frac{7}{48}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{48p-3}{64}-\sqrt{\left(\frac{3-48p}{64}\right)^2-\left(\frac{7}{48}\right)^3}}-\frac{1}{4}\right],$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数.

根据引理 1 可知

$$S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right)=p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

注意到,当 $1\leqslant n\leqslant n_p$ 时,$n(2n-1)\leqslant\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\leqslant p$,由引理 1 和引理 2 可得

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1))=p\times(1+6+..+n(2n-1))=$$
$$p\times\frac{4n^3+3n^2-n}{6}=$$
$$S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

于是可知 $n=1,2,\cdots,n_p$ 是方程的解.

(b) 当 $n(2n-1)\leqslant p<\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$,解这个不等式可得 $n_p<n\leqslant n'_p$,其中

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$n'_p = \left[\frac{1+\sqrt{1+8p}}{4}\right].$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

从而根据引理 1 可知

$$S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right) < p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

但是

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1)) = p\times(1+6+\cdots+n(2n-1)) = p\times\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right).$$

因此在这种情形下方程无正整数解.

(c) 当 $n \geqslant n'_p+1$ 时，也就是 $p < n(2n-1) < \frac{4n^3+3n^2-n}{6}$，则一定存在 m_k 满足 $1 \leqslant m_k \leqslant k(2k-1)(k=1,2,\cdots,n)$，这时

$$S_p(1)=m_1p, S_p(6)=m_2p,\cdots,S_p(n(2n-1))=m_np.$$

并且 $n(2n-1) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_kp}{p^i}\right](k=1,2,\cdots,n)$.从而有

$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1)) = p(m_1+m_2+\cdots+m_n).$$

另一方面，注意到 $\frac{4n'^3_p+3n'^2_p-n'_p}{6}-1 \geqslant p$，$m_1=1$，$m_2=6$，$m_3=15$，$\cdots$，$m_{n'_p}=n'_p(2n'_p-1)$，根据引理 3 可得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1}{p^i}\right]=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+p-1}{p^i}\right]=$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)+p-1}{p^i}\right]\geqslant$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{p(m_1+m_2+\cdots+m_{n'_p}-1)+p-1}{p^i}\right]+$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{n'_p+1}+m_{n'_p+2}+\cdots+m_n}{p^i}\right]\geqslant$$
$$m_1+m_2+\cdots+m_{n'_p}+\left(m_{n'_p+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{n'_p+1}}{p^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{p^i}\right]\right)\geqslant$$
$$1+6+\cdots+n'_p(2n'_p-1)+\cdots+n(2n-1)=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}.$$

从而根据引理 2 可得

$$p^{(4n^3+3n^2-n)/6} \mid (p(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1)!$$

因此

$$S_p\left(\frac{4n^3+3n^2-n}{6}\right) \leqslant p(m_1+m_2+\cdots+m_n)-1 <$$
$$p(m_1+m_2+\cdots+m_n)=$$
$$S_p(1)+S_p(6)+\cdots+S_p(n(2n-1)).$$

在这种情形下方程也无正整数解.

综上所述，定理得证.

参考文献(References)：

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. 4th ed. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[2] ZHANG W P, LIU D S. Primitive number of power p and its asymptotic property[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1-3): 173-175.

[3] LIANG F C, YI Y. The primitive number of power p and its asymptotic property[C]//Research on Smarandache Problems in Number Theory, Phoenix: Hexis, 2004: 129-131.

[4] ERDOS P. Problem 6674[J]. The American Mathematical Monthly, 1991, 98: 965.

[5] BEGAY A. Smarandache ceil functions[J]. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 1997, 16E: 227-229.

[6] **高丽,马娅峰.包含** Smarandache **幂函数的均值问题**[J].**纺织高校基础科学学报**,2016,29(1):8-10.
GAO Li, MA Yafeng. The average issue involving the Smarandache power function[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2016, 29(1): 8-10.

[7] **吴成晶**.Smarandache Ceil **函数的均值**[J].**纺织高校基础科学学报**,2014,27(4):428-430.
WU Chengjing. Mean value of Smaradache ceil function [J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2014, 27(4): 428-430.

[8] **赵娜娜.一个关于** Smarandache LCM **对偶函数的方程**[J].**纺织高校基础科学学报**,2013,26(3):323-327.
ZHAO Nana. An equation involving the Smaradache LCM dual function[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2013, 26(3): 323-327.

[9] **童敏娜.一个新的伪** Smarandache **函数及其均值**[J].**纺织高校基础科学学报**,2013,26(1):18-20.
TONG Minna. A new pseudo-Smaradache function and its mean value[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universitis, 2013, 26(1): 18-20.

[10] **韩彬玲.关于三角形数的** Smarandache **连续数列**[J].**纺织高校基础科学学报**,2012,25(1):71-74.
HAN Binling. On the Smaradache consecutive sequence of triangular numbers[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universitis, 2012, 25(1): 71-74.

[11] **李洁.一个包含** Smarandache **原函数的方程**[J].**数学学报**,2007,50(2):333-336.
LI Jie. An equation involving the Smaradache primitive function[J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 50(2): 333-336.

[12] **付瑞琴.一个包含** Smarandache **原函数与一类自然数乘积之和的方程**[J].**延安大学学报**,2008,27(3):3-5.
FU Ruiqin. An equation involving the Smaradache primitive function and a kind of sum of natural number products[J]. Journal of Yan′an University, 2008, 27(3): 3-5.

[13] FU Ruiqin, YANG Hai. An equation involving the cubic sum of natural numbers and Smarandache primitive function[J]. Scientia Magna, 2008, 4(1): 158-167.

[14] YANG Hai, FU Ruiqin. An equation involving the square sum of natural numbers and Smarandache primitive function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 18-25.

[15] FU Ruiqin, YANG Hai. An equation involving the Lucas numbers and Smarandache primitive function[J]. Scientia Magna, 2009, 5(2): 89-96.

[16] YANG Hai, FU Ruiqin. An equation involving the Fibonacci numbers and Smarandache primitive function[J]. IEEE 2nd International Conference on Multimedia Technology, Hangzhou, 2011: 1969-1972.

[17] FARRIS M, MITCHELL P. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002(13): 37-42.

[18] **潘承洞,潘承彪.初等数论**[M].**北京:北京大学出版社**,2003:16-20
PAN Chengdong, PAN Chengbiao. Elementary number theory[M]. Beijing: Beijing University Press, 2003: 16-20

编辑:武 晖;校对:赵 放

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net