第29卷第3期 晋 中 学 院 学 报 Vol.29 No.3
2012年6月 Journal of Jinzhong University Jun. 2012

一个包含伪 F.Smarandache 函数的对偶的方程

杜晓英

(晋中学院 数学学院,山西 晋中 030600)

摘 要:对任意正整数 n,伪 F.Smarandache 函数的对偶 $Z(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $\frac{m(m+1)}{2}$.利用初等方法研究一类包含伪 F.Smarandache 函数的对偶的方程的可解性,即一定存在正整数 n 满足方程 $\sum_{d|n} Z(d)=\phi(n)$ 并获得了给定方程的部分正整数解.

关键词:伪 Smarandache 函数的对偶;方程;正整数解

中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-1808(2012)03-0014-04

1 引言及结论

令 $Z_*(n)$ 表示伪 F.Smarandache 函数的对偶,对任意的正整数 n,$Z_*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $\frac{m(m+1)}{2}$. 即:$Z_*(n)=\max\{m\in N^*:\frac{m(m+1)}{2}\mid n\}$.例如,$Z_*(1)=Z_*(2)=1$,$Z_*(3)=2$,$Z_*(4)=Z_*(5)=1$,$Z_*(6)=3$,$Z_*(7)=Z_*(8)=1$,$Z_*(9)=2$,$Z_*(10)=4$,……伪 F.Smarandache 函数的对偶是由 Jozsef Sandor 在文献[1]中首次提出的.由定义容易知道伪 F.Smarandache 函数的对偶具有性质 $Z_*(1)=1$ 及 $Z_*(p)=\begin{cases}2 & \text{如果 } p=3;\\ 1 & \text{如果 } p\neq 3\end{cases}$ 其中 p 为任意的素数.

在文献[2]中,Jozsef Sandor 进一步研究了有关 $Z_*(n)$ 的性质,即获得了结论 $Z_*(n)\sim\frac{1}{2}\sqrt{8x+1}$,并且研究了一个包含 $Z_*(n)$ 的无穷级数的敛散性,就是当 $\alpha>2$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Z_*(n))^{\alpha}}$ 是收敛的.

在文献[3]中,刘端森和杨存典研究了关于 $Z_*(n)$ 的均值性质,并给出了一个有趣的渐近公式,就是对任意实数 $x\geqslant 1$,$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} Z_*(n)=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)$,其中 A 表示所有简单数的集合,C_1、C_2 都是可计算的常数.

本文的主要目的是利用初等方法研究一类包含伪 F.Smarandache 函数的对偶方程的可解性,并获得了该方程在给定条件下的部分正整数解.具体地说我们考虑了如下的问题:是否存在正整数满足方程

$$\sum_{d|n} Z_*(d)=\phi(n), \tag{1}$$

其中 $\phi(n)$ 为 Euler 函数,表示所有与 n 互素且不超过 n 的正整数的个数.即证明了下面的定理:

定理 方程(1)在下面两种给定条件的解的情况:

(i) 在 $n=p$ 时有且仅有两个解 $n=1$,$n=8$.

[收稿日期] 2011-12-25

[作者简介] 杜晓英(1983-),女,山西和顺人,晋中学院数学学院,助教,硕士,研究方向 数论及其应用.

(ⅱ) 在 $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$,$n=2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$,$n=3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$ 时无解;在 $n=2^{\alpha_1}7^{\alpha_2}$ 时有且仅有一个解 $n=28$.

2 定理的证明

为完成定理的证明,我们需要下面两个引理:

引理 1 设 $s\geqslant 1$ 为整数,p 是素数,则有 $Z_*(p)=\begin{cases}2 \text{ 如果 } p=3\\ 1 \text{ 如果 } p\neq 3\end{cases}$.

证明:由文献[1]的命题 1 立刻可以得出上式.

引理 2 令 $n=p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为任意正整数 n 的标准分解式,则当 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)+1<p_1^{\frac{\alpha_1}{2}-1}(p_1-1)\cdots P_s^{\frac{\alpha_1}{2}-1}(p_s-1)$ 时方程(1)无解.

证明:当因子 $d\neq n$ 时,显然 $d\leqslant\frac{n}{2}$,我们令 $Z_*(d)=m$,则由 $Z_*(n)$ 的定义有 $\frac{m(m+1)}{2}\leqslant\frac{n}{2}$,即 $m^2+m-2n\leqslant 0$,可得 $m\leqslant\frac{-1+\sqrt{4n+1}}{2}\leqslant\sqrt{n}$;而当 $d=n$ 时,令 $Z_*(d)=m$,则由定义 $\frac{m(m+1)}{2}\leqslant n$,可得 $m\leqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\leqslant 2\sqrt{n}$. 结合这两种情况有 $\sum\limits_{d|n}Z_*(d)\leqslant\sqrt{n}(d(n)-1)+2\sqrt{n}=\sqrt{n}(d(n)+1)$.

当 $\sqrt{n}(d(n)+1)<\phi(n)$ 时,方程(1)定无解.令 $n=p_1^{\alpha}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,我们有 $\phi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_s-1)$ 和 $d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$ 应用到 $\sqrt{n}(d(n)+1)<\phi(n)$ 中,即当

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)+1<p_1^{\frac{\alpha_1}{2}-1}(p_1-1)\cdots p_s^{\frac{\alpha_s}{2}-1}(p_1-1)$$

时方程(1)定无解,引理得证.

现在我们来完成定理的证明.容易验证 $n=1$ 是方程的解.下面我们分几种情况来讨论:

I. 当 n 为素数时,即 $\phi=p$ 时有 $Z_*(p)=\begin{cases}2 \text{ 如果 } p=3;\\ 1 \text{ 如果 } p\neq 3\end{cases}$,而 $\phi(p)=p-1$. 当 $p=3$ 时,有 $\sum\limits_{d|3}Z_*(d)=3$,而 $\phi(3)=2$,不相等;当 $p\neq 3$ 时,有 $\sum\limits_{d|3}Z_*(d)=2$,要使 $Z=\phi(p)=p-1$,只有 $p=3$ 时成立. 所以当 $n=p$ 时无解.

II. 当 $n=p^{\alpha}$ 时,其中 $\alpha>1$. 由引理 1 有 $Z_*(p)=\begin{cases}2 \text{ 如果 } p=3;\\ 1 \text{ 如果 } p\neq 3.\end{cases}$;而 $\phi(p^{\alpha})=p^{\alpha-1}(p-1)$.

(ⅰ) 当 $p=3$ 时,$\sum\limits_{d|3^{\alpha}}Z_*(d)=1+2\alpha$,而 $\phi(3^{\alpha})=3^{\alpha-1}\cdot 2$. 但是当 $\alpha\geqslant 2$,有 $1+2\alpha<2\cdot 3^{\alpha-1}$,所以方程无解;

(ⅱ) 当 $p=2$ 时,$\sum\limits_{d|2^{\alpha}}Z_*(d)=1+\alpha$,而 $\phi(2^{\alpha})=2^{\alpha-1}$. 求解 $1+\alpha=2^{\alpha-1}$,得 $\alpha=3$,当 $\alpha>3$ 时,有 $1+\alpha<2^{\alpha-1}$,所以只有 $n=8$ 是方程的解;

(ⅲ) 当 $p=5$ 时,$\sum\limits_{d|5^{\alpha}}Z_*(d)=1+\alpha$,而 $\phi(5^{\alpha})=5^{\alpha-1}\cdot 4$.但是当 $\alpha\geqslant 2$,有 $1+2\alpha<4\cdot 5^{\alpha-1}$,所以方程无解;

(ⅳ) 当 $p\geqslant 5$ 时,$\sum\limits_{d|n^{\alpha}}Z_*(d)=1+\alpha$,$\phi(p^{\alpha})=p^{\alpha-1}\cdot(p-1)$,随着素数的增大 $\phi(n)$ 增长的速度也越快,所以 $p\geqslant 5$ 时,$1+\alpha<p^{\alpha-1}\cdot(p-1)$.

结合上面几种情况在 $n=p^{\alpha}$ 时只有 $n=8$ 是解.

III. 当 $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ 时,利用引理 2 可得,当 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+1<2^{\frac{\alpha_1}{2}}3^{\frac{\alpha_2}{2}-1}$ 时方程定无解.计算得当 $n\geqslant 2^5 3^6$ 时,$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)+1<2^{\frac{\alpha_1}{2}}3^{\frac{\alpha_2}{2}-1}$.下面我们只考虑在 $n<2^5 3^6$ 下的情况:

（i）当 $\alpha_1=1$ 或 $\alpha_2=1$ 时，$Z_*(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2})=3$，那么 $\sum_{d|n^\alpha} Z_*(d)=1+\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2$，而 $\phi(n)=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2-1}$.计算可得，当 $\alpha_1\leqslant 4$ 或 $\alpha_1\leqslant 2$ 时，$1+\alpha_1+2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_1\alpha_2>2^{\alpha_1}3^{\alpha_2-1}$ 当$\alpha_1>4$ 或 $\alpha_2>2$ 时，$1+\alpha_1+2\alpha_1+3\alpha_1\alpha_2<2^{\alpha_1}3^{\alpha_2-1}$.

（ii）当 $\alpha_1\geqslant 2$ 且 $\alpha_2\geqslant 2$ 时，$Z_*(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2})=8$，那么

$$\sum_{d|n} Z_*(d)=1+\alpha_1+2\alpha_2+3(\alpha_1+\alpha_2)+8(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)=9+8\alpha_1\alpha_2-4\alpha_1-3\alpha_2,$$

而 $\phi(n)=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2-1}$.计算可得，当 $n<2^3 3^3$ 时，

$$\sum_{d|n} Z_*(d)>\phi(n)\text{；}n\geqslant 2^3 3^3\text{ 时，}\sum_{d|n} Z_*(d)<\phi(n)$$

结合这两种情况即知当 $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}$ 时无解.

利用同样的方法我们可以得到当 $n=2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$，$n=3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$ 时，方程也都无解，但是在 $n=2^{\alpha_1}7^{\alpha_2}$ 时有且仅有一个解 $n=28$.

结合以上三种情况我们立刻完成定理的证明.

参考文献

[1] Jozse.Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal，2002（13）：18~23.

[2] Jozse.Sandor. On additive analogues of certain arithmetic function [J]. Smarandache Notions Journal，2004（14）：128~123.

[3] Liu Duansen and Yang cundian. On a dual of the Pseudo-Smarandache function and its asymptotic formula [J]. Research on Smarandache problems in number theory，2004（I）：123~127.

[4] F. Smarandache. Only Problems，not Solutions [M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

（编辑　郭继荣）

（上接第 4 页）

[6] Wen G. C.Begehr H.Boundary value problems for elliptic equations and systems [M]. Pitman Monographs 46，Harlow：Longman Scienti.c and Technical Company，1990.

[7] Wen G. C.，Chen D. C.，Xu Z. L.Nonlinear complex analysis and its applications [M]. Mathematics Mono-graph Series 12，Beijing：Science Press，2008.

[8] Wen G. C.Recent progress in theory and applications of modern complex analysis [M]. Beijing：Science Press，2010.

Generalized Darboux's Second Problem for Degenerate Hyperbolic Equations

WEN Guo-Chun

（*School of Mathematical Sciences,Beijing University,Beijing* 100871，*China*）

Abstract：In [1]，A.V.Bitsadze put forward and discussed Darboux's first and second problems for the linear hyperbolicequation $u_{xx}-u_{yy}+au_x+b_y+cu+d=0$ without parabolic degenerate line in a closed domain D. The present paper dealt with some boundary value problems for the degenerate hyperbolic equations of second order. The representations of solutions for Darboux's second problem and oblique derivative problem in general domains were given，and the existence and uniqueness of solutions for the problems were proved. The method in this paper is different from that in [1] and simpler than that for the equation (A) in [1]，by the result in this paper，the Frankl problem can be solved of generalized Chaplygin equations in general domains.

Keywords：degenerate hyperbolic equations；generalized Darboux's second problem；existence and uniqueness of solutions.

（编辑　郭继荣）