一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程

张 沛

(西北大学数学系 西安 710127)

摘要: 研究一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程问题. 利用初等方法, 给出一个包含伪 Smarandache 无平方函数的方程的所有正整数解, 证明了这一方程有且仅有 3 个解.

关键词: 伪 Smarandache 无平方因子函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O 156.4 文章编号: 1671－6841(2008)02－0036－03

对任意正整数 n, 伪 Smarandache 无平方因子函数 $ZW(n)$ 定义为最小的正整数 m, 使得 m^n 能被 n 整除. 即 $ZW(n)=\min\{m : n \mid m^n\}$. 例如, $ZW(1)=1$, $ZW(2)=2$, $ZW(3)=3$, $ZW(4)=2$, …. 乐茂华[1] 证明了: 当 $n>1$ 时,

$$ZW(n)=p_1p_2\cdots p_k \tag{1}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是 n 的不同素因子. 同时他也证明了级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ZW(n))^a},\ a\in\mathbf{R},\ a>0$$

是发散的. 此外, 刘华宁[2] 研究了该函数的均值性质, 并获得了两个有趣的结果. 他证明了: 对任意实数 α, s 且满足 $(s-\alpha)>1$ 及 $\alpha>0$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ZW^{\alpha}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right],$$

其中, $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta- 函数, $\prod\limits_p$ 表示对所有的素数因子求积.

对任意实数 $\alpha>0$ 及 $x\geqslant 1$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}ZW^{\alpha}(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

本文中, 应用初等方法研究一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程, 并给出这个方程的所有正整数解.

定理 对任意的正整数 n, 方程

$$\sum_{i=1}^{n}ZW(i)=ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{2}$$

有且仅有 3 个解, 它们分别是 $n=1, 2, 3$.

为了完成定理的证明, 需要下面一个简单引理.

引理 对任意正整数 n, 有不等式

$$\sum_{\substack{i\leqslant n\\ |\mu(i)|\neq 0}} i>\frac{3}{\pi^2}n^2-\frac{9}{8}n^{\frac{3}{2}},$$

其中, $\mu(n)$ 为 Möbius 函数.

证明 利用 Möbius 函数的性质知, $|\mu(i)|=\sum\limits_{d^2\mid i}\mu(d)$, 于是有

$$\sum_{\substack{i\leqslant n\\ |\mu(i)|\neq 0}} i=\sum_{i\leqslant n}|\mu(i)|i=\sum_{i\leqslant n}\sum_{d^2\mid i}\mu(d)i=\sum_{d^2l\leqslant n}\mu(d)d^2l$$

收稿日期: 2007-12-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目, 编号 10671155.
作者简介: 张沛(1983－), 女, 硕士研究生, 主要从事数论及其应用研究, E-mail: zhangpei840214@163.com.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} \mu(d) d^2 \sum_{l\leqslant \frac{n}{d^2}} l = \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} d^2 \mu(d) \left(\frac{\left[\frac{n}{d^2}\right]\left(\left[\frac{n}{d^2}\right]+1\right)}{2} \right) \\
&= \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} d^2 \mu(d) \left(\frac{n^2}{2d^4} + \frac{n}{2d^2} - \frac{n}{d^2}\left\{\frac{n}{d^2}\right\} - \frac{1}{2}\left(\left\{\frac{n}{d^2}\right\} - \left\{\frac{n}{d^2}\right\}^2\right) \right) \\
&> \frac{n^2}{2} \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{n}{2} \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \sum_{d\leqslant\sqrt{n}} \frac{d^2}{4} \\
&> \frac{n^2}{2}\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>\sqrt{n}} \frac{1}{d^2} \right) - \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} n^{\frac{3}{2}} \\
&> \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{\zeta(2)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{5}{8} n^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{n^2}{2}\left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{5}{8} n^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3n^2}{\pi^2} - \frac{9}{8} n^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

这就完成了引理的证明.

定理的证明　分两种情况进行讨论:

Ⅰ 当 $n < 4$ 时, 根据伪 Smarandache 无平方因子函数的定义, 有

$$ZW(1) = 1,\ ZW(2) = 2,\ ZW(3) = 3,\ ZW(6) = 6.$$

由此可知, 当 $n < 4$ 时, 均有

$$\sum_{i=1}^{n} ZW(i) = ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

即 $n = 1, 2, 3$ 是方程的解.

Ⅱ 当 $n \geqslant 4$ 时, 再分两种情况进行讨论:

(ⅰ) 当 $\frac{n(n+1)}{2}$ 无平方因子时, 根据函数 $ZW(n)$ 的定义有

$$ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

注意到在 $\sum_{i=1}^{n} ZW(i)$ 中至少有一项 $ZW(i) < i$, 例如 $ZW(4) = 2 < 4$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n} ZW(i) < \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} ZW(i) < ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

此时方程(2) 无解.

(ⅱ) 当 $\frac{n(n+1)}{2}$ 有平方因子时, 根据函数 $ZW(n)$ 的定义及性质有下面的不等式

$$ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \leqslant \frac{n(n+1)}{4},$$

又根据函数 $ZW(n)$ 和 $\mu(n)$ 的定义有

$$\sum_{i=1}^{n} ZW(i) \geqslant \sum_{\substack{i\leqslant n \\ |\mu(i)|\neq 0}} i.$$

再结合引理

$$\sum_{\substack{i\leqslant n \\ |\mu(i)|\neq 0}} i > \frac{3}{\pi^2} n^2 - \frac{9}{8} n^{\frac{3}{2}},$$

当 $n \geqslant 529$ 时, 显然有

$$\frac{3}{\pi^2}n^2 - \frac{9}{8}n^{\frac{3}{2}} > \frac{n(n+1)}{4}.$$

此时有不等式

$$\sum_{i=1}^{n} ZW(i) > ZW\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

所以方程(2)无解,也就是当 $n \geqslant 529$ 时,方程(2)均无解.

当 $4 \leqslant n < 529$ 时,容易验证 $n = 4, 5, 6, 7, \cdots, 27, 528$ 不是方程(2)的解.

综上所述,当且仅当 $n < 4$ 时,方程(2)有解,且有3个解,分别为 $n = 1, 2, 3$.

致谢　衷心感谢导师张文鹏教授的悉心指导.

参考文献:

[1] Le Maohua. On the pseudo-Smarandache squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1/2/3): 229-236.

[2] Liu Huaning, Gao Jing. Mean value on the pseudo-Smarandache squarefree function[C] //Research on Smarandache Problems in Number Theory. Chicago: Xiquan Publ House, 2004: 9-11.

[3] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

An Equation Involving the Pseudo-Smarandache Squarefree Function

ZHANG Pei

(*Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an* 710127, *China*)

Abstract: An equation involving the pseudo-Smarandache squarefree function is studied. Using the elementary methods, all the positive integer solutions of this equation are given, and it is proven that the equation has three positive integer solutions.

Key words: pseudo-Smarandache squarefree function; equation; positive integer solution