第38卷第23期　　数学的实践与认识　　Vol. 38 No. 23
2008年12月　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　Decem., 2008

一个包含新的F. Smarandache函数的方程

陈国慧[1]，张　沛[2]

(1. 海南师范大学 数学与统计学院，海南 海口　571158)
(2. 西北大学 数学系，陕西 西安　710069)

摘要： 定义一个新的F. Smarandache函数 $\overline{SL}(n)$，并研究一个包含该函数的方程．利用初等方法，给出了一个包含函数 $\overline{SL}(n)$ 的方程的正整数解．该方程只有两个正整数解．

关键词： 新的Smarandache函数；方程；正整数解

1　引言及结果

对任意正整数 n，著名的F. Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid[1,2,\cdots,m]$，其中 $[1,2,\cdots,m]$ 表示 $1,2,\cdots,m$ 的最小公倍数．例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1)=1,SL(2)=2,SL(3)=3,SL(4)=4,SL(5)=5,\cdots$．不少学者研究过关于 $SL(n)$ 的初等性质，并获得了一系列结果，参阅文献[1-3]．当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式时，容易得到

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}.$$

通常将满足 $f(n)=\max\{f(p_1^{\alpha_1}),f(p_2^{\alpha_2}),\cdots,f(p_k^{\alpha_k})\}$ 的算术函数 $f(n)$ 称为Smarandache可乘函数．因此 $SL(n)$ 是一个Smarandache可乘函数．可参阅文献[4]．

由Smarandache可乘函数的定义得到启发，本文定义了一个新的Smarandache型函数 $\overline{SL}(n)$ 如下：$\overline{SL}(1)=1$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时定义：

$$\overline{SL}(n)=\min\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}. \tag{1}$$

研究发现函数 $\overline{SL}(n)$ 与函数 $SL(n)$ 有许多类似的性质，参阅文献[5,6]，例如当 n 为素数的方幂时，$\overline{SL}(n)=SL(n)$．对于 $\overline{SL}(n)$ 函数显然存在无限多个正整数 n 使得 $\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)>n$．事实上，由(1)式知，当 $n=p^{\alpha}$ 为素数方幂时，我们有

$$\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)=\sum_{d\mid p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+p+\cdots+p^{\alpha}>p^{\alpha}=n.$$

同时又存在无限多个正整数 n，使得 $\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)<n$．例如当 n 为两个不同奇素数的乘积时，即 $n=p\cdot q$，其中 $3\le p<q$ 为素数，那么

$$\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)=\sum_{d\mid p\cdot q}\overline{SL}(d)=1+2p+q<p\cdot q=n.$$

于是我们想到，对于哪些自然数 n，会有方程 $\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)=n$ 成立？本文的主要目的是研究一类包含 $\overline{SL}(n)$ 方程的可解性，即寻求所有正整数 n，使得方程

收稿日期：2007-06-24
基金项目：海南省教育厅高等学校科研资助项目(Hjkj2008-29)；国家自然科学基金资助项目(10671155)

$$\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=n \tag{2}$$

成立，其中 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和. 也就是证明了以下的

定理 方程 $\sum_{d|n}\overline{SL}(d)=n$ 有且仅有两个正整数解 $n=1,10$.

2 引理及其证明

为了完成定理的证明. 首先需要一个简单引理.

引理 当 $m\geq 13$ 时，$m\geq 3d(m)$，这里 $d(m)$ 为除数函数.

证明 设 $m\geq 13$ 且 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准素因数分解式. 我们分以下几种情况来进行讨论：

i) 如果有一个 $\alpha_i\geq 4(1\leq i\leq k)$，则有

$$\frac{m}{\mathrm{d}(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\geq\frac{2^4}{4+1}>3,$$

即 $m\geq 3d(m)$. 参阅文献[7].

ii) 如果 $\max\limits_{1\leq i\leq k}\{\alpha_i\}=\alpha_j=3$，则当 $p_j\geq 3$ 时有

$$\frac{m}{\mathrm{d}(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\geq\frac{3^3}{3+1}>3,$$

而当 $p_j=2$ 时，m 至少有两个不同的素因子，于是有

$$\frac{m}{\mathrm{d}(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\geq\frac{2^3}{3+1}\cdot\frac{3}{1+1}=3,$$

即 $m\geq 3d(m)$.

iii) 如果 $\max\limits_{1\leq i\leq k}\{\alpha_i\}=\alpha_j=2\ (i=1,2,\cdots,k)$，若 $p_j\geq 3$，则 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\geq\frac{3^2}{2+1}=3$，若 $p_j=2$，由于 $n(\geq 13)$ 至少还有另一个素因子 $q\geq 5$，则 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i+1}\geq\frac{2^2}{2+1}\cdot\frac{5}{1+1}>3$；即都有 $m\geq 3d(m)$.

iv) 如果 $\alpha_i=1(\ i=1,2,\cdots,k)$，若 $k=1$，则 $p\geq 13$，$\frac{m}{\mathrm{d}(m)}\geq\frac{13}{1+1}>3$；

若 $k=2$，当 m 含有素因子 2 时必有另一个素因子 $q\geq 7$，此时 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}\geq\frac{2}{1+1}\cdot\frac{7}{1+1}>3$；当 m 含有素因子 3 时必有另一个素因子 $q\geq 5$，此时 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}\geq\frac{3}{1+1}\cdot\frac{5}{1+1}>3$；当 m 含有两个 ≥ 5 的不同素因子，此时 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}\geq\frac{5}{1+1}\cdot\frac{7}{1+1}>3$；

若 $k\geq 3$，我们有 $\frac{m}{\mathrm{d}(m)}\geq\frac{2}{1+1}\cdot\frac{3}{1+1}\cdot\frac{5}{1+1}>3$，即对任何情形都有 $m\geq 3d(m)$. 结合以上情况立刻完成引理的证明.

3　定理的证明

现在我们利用这个引理来给出定理的证明.容易验证 $n=1$ 是方程的解.设 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式，因为 $n=p^\alpha$ 不满足方程，所以当 n 满足方程时有 $k\geq 2$. 现在设

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}=p^\alpha.$$

为方便起见设 $n=mp^\alpha$ 满足方程，此时应有：

$$\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d\mid m}\overline{SL}(dp^i)=\sum_{d\mid m}\overline{SL}(d)+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d\mid m}\overline{SL}(dp^i)=mp^\alpha.$$

因为当 $d\mid m$ 时，$\overline{SL}(dp^i)\leq p^i$，所以

$$mp^\alpha\leq\sum_{d\mid m}\overline{SL}(d)+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{d\mid m}p^i=\sum_{d\mid m}\overline{SL}(d)+d(m)\cdot\sum_{i=1}^{\alpha}p^i$$
$$=\sum_{d\mid m}\overline{SL}(d)+\frac{p(p^\alpha-1)}{p-1}d(m).$$

上式两边同除以 p^α，并注意到当 $d\mid m$ 时 $\overline{SL}(d)\leq p^i$，所以有

$$m\leq\sum_{d\mid m}\frac{\overline{SL}(d)}{p^\alpha}+\frac{p(p^\alpha-1)}{(p-1)p^\alpha}\cdot d(m)<d(m)+\frac{p}{p-1}\cdot d(m)\leq 3d(m).$$

即若 $n=mp^\alpha$ 满足方程，应有 $m<3d(m)$，也就是当 $m\geq 3d(m)$ 时，$n=mp^\alpha$ 不是方程的解，由引理可知此时 $m\geq 13$. 下面只需讨论当 $m<13$ 时，哪些 $n=mp^\alpha$ 满足方程即可.

1）当 $m=7,9,11$ 时，容易验证 $m\geq 3d(m)$，此时 $n=mp^\alpha$ 不是方程的解.

2）当 $m=2$ 时，$n=2p^\alpha$，此时 $p\geq 3$.

$$\sum_{d\mid 2p^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum_{d\mid p^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum_{d\mid p^\alpha}\overline{SL}(2d)=\sum_{d\mid p^\alpha}\overline{SL}(d)+2(\alpha+1)$$
$$=1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1).$$

若 $\alpha=1$，解 $1+p+2(1+1)=2p$ 得 $p=5$，此时 $n=2p=10$ 显然是方程的解.

若 $\alpha=2$，假如 $p=3$，则 $\sum\limits_{d\mid 2\cdot 3^2}\overline{SL}(d)=1+3+3^2+2(2+1)=19>2\cdot 3^2$，即 $\sum\limits_{d\mid 2\cdot 3^2}\overline{SL}(d)>n$. 假如 $p\geq 5$，则 $\sum\limits_{d\mid 2p^2}\overline{SL}(d)=1+p+p^2+2(2+1)=7+p+p^2<2p^2$，即 $\sum\limits_{d\mid 2p^2}\overline{SL}(d)<n$.

若 $\alpha\geq 3$，对正整数 $\alpha(\geq 3)$ 用数学归纳法易证不等式 $1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+2(\alpha+1)<2p^\alpha$ 成立，即 $\sum\limits_{d\mid 2p^\alpha}\overline{SL}(d)<n$.

3）当 $m=3$ 时，$n=3p^\alpha$，此时 $p=2,\alpha\geq 2$ 或 $p\geq 5$，

若 $p=2$ 时，$\sum\limits_{d\mid 3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum\limits_{d\mid 2^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum\limits_{d\mid 2^\alpha}\overline{SL}(3d)=2^{\alpha+1}+3\alpha+1$. 假如 $\alpha=2,3$，则 $\sum\limits_{d\mid 3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)>n$. 假如 $\alpha\geq 4$，则 $2^{\alpha+1}+3\alpha+1<3\cdot 2^\alpha$，即 $\sum\limits_{d\mid 3\cdot 2^\alpha}\overline{SL}(d)<n$.

若 $p\geq 5$ 时，则 $\sum\limits_{d\mid 3p^\alpha}\overline{SL}(d)=\sum\limits_{d\mid p^\alpha}\overline{SL}(d)+\sum\limits_{d\mid p^\alpha}\overline{SL}(3d)=1+p+p^2+\cdots+p^\alpha+3(\alpha+1)<3p^\alpha$，即 $\sum\limits_{d\mid 3p^\alpha}\overline{SL}(d)<n$.

4）当 $m=4$ 时，$n=4p^{\alpha}$，则 $p\geq 3$，

若 $p=3$，则 $\sum_{d|4\cdot 3^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|3^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|3^{\alpha}}\overline{SL}(2d)+\sum_{d|3^{\alpha}}\overline{SL}(4d)=3+3^{2}+\cdots+3^{\alpha}+6(\alpha+1)<4\cdot 3^{\alpha}$，即 $\sum_{d|4\cdot 3^{\alpha}}\overline{SL}(d)<n$.

若 $p\geq 5$，则 $\sum_{d|4\cdot p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(2d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(4d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+6(\alpha+1)<4p^{\alpha}$，即 $\sum_{d|4p^{\alpha}}\overline{SL}(d)<n$.

5）当 $m=5$ 时，$n=5p^{\alpha}$，

若 $p=2,\alpha\geq 3$，则 $\sum_{d|5\cdot 2^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|2^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|2^{\alpha}}\overline{SL}(5d)=2^{\alpha+1}+5\alpha\neq 5\cdot 2^{\alpha}=n$.

若 $p=3,\alpha\geq 2$，则 $\sum_{d|5\cdot 3^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|3^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|3^{\alpha}}\overline{SL}(5d)=1+3+3^{2}+\cdots+3^{\alpha}+5\alpha+3<5\cdot 3^{\alpha}=n$.

若 $p>5$ 时，则 $\sum_{d|5\cdot p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(5d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+5(\alpha+1)<5p^{\alpha}=n$.

6）当 $m=6$ 时，则 $p\geq 5$，$\sum_{d|6p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(2d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(3d)+\sum_{d|p^{\alpha}}\overline{SL}(6d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+7(\alpha+1)<6p^{\alpha}=n$.

7）当 $m=8$ 时，

若 $p=3$，则 $\alpha\geq 2$，$\sum_{d|8\cdot 3^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+3+3^{2}+\cdots+3^{\alpha}+14\alpha+8<8\cdot 3^{\alpha}=n$.

若 $p=5$，则 $\alpha\geq 2$，$\sum_{d|8\cdot 5^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+5+5^{2}+\cdots+5^{\alpha}+14\alpha+11<8\cdot 5^{\alpha}=n$.

若 $p=7$，则 $\alpha\geq 2$，$\sum_{d|8\cdot 7^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+7+7^{2}+\cdots+7^{\alpha}+14\alpha+13<8\cdot 7^{\alpha}=n$.

若 $p>7$，则 $\sum_{d|8p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+14(\alpha+1)<8p^{\alpha}=n$.

8）当 $m=10$ 时，

若 $p=3$，则 $\alpha\geq 2$，$\sum_{d|10\cdot 3^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+3+3^{2}+\cdots+3^{\alpha}+9\alpha+7<10\cdot 3^{\alpha}=n$.

若 $p>5$，则 $\sum_{d|10p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+9(\alpha+1)<10p^{\alpha}=n$.

9）当 $m=12$ 时，则 $p\geq 5$

$\sum_{d|12p^{\alpha}}\overline{SL}(d)=1+p+p^{2}+\cdots+p^{\alpha}+14(\alpha+1)<12p^{\alpha}=n$.

综上所述，只有 $n=1,10$ 是方程的解.

参考文献：

[1] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[2] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[3] Lv Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[4] Smarandache F. Only Problems[M]. Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[5] Balacenoiu I, Seleacu V. History of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 192-201.

[6] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York, Springer-Verlag, 1976.

[7] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.

The Calue Distribution of a New F. Smarandache Function

CHEN Guo-hui[1], ZHANG Pei[2]

(1. Mathematics and Statistics College, Hainan Normal University, Haikou Hainan 571158, China)

(2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an Shaanxi 710069, China)

Abstract: Aim: To study an equation involving a new F. Smarandache function $\overline{SL}(n)$. Methods: Using the elementary methods. Results: Get all its positive integer solutions of this equation. Conclusion: The equation have only two positive integer solutions.

Keywords: A new F. Smarandache function; equation; positive integer solutions