doi: 10.3969/j.issn.1003-4271.2013.04.18

一个包含有 F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的混合均值

朱民

(商丘师范学院计算机与技术科学学院，河南 商丘 476000)

摘 要: F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$定义为使得 $n|[1,2,3,\cdots,k]$ 整除 $1,2,3,\cdots,k$ 的最小公倍数的最小正整数 k .

主要利用 $SL(n)$ 的性质及 Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 的定义研究了 $\Lambda(n)\cdot SL(n)$ 的均值性质,并得到了渐近公式

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SL(n)) = x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x} + O(\frac{x^2}{\ln^k x}).$$

关键词: F.Smarandache LCM 函数；Mangoldt 函数；渐近公式；均值

中图分类号: O24 文献标识码: A 文章编号: 1003-4271(2013)04-0564-03

1 预备知识

F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$定义为使得 $n|[1,2,3,\cdots,k]$ 整除 $1,2,3,\cdots,k$ 的最小公倍数的最小正整数 k 见[1], 例如 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13\cdots$ 由 $SL(n)$ 的定义我们容易推出如果 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式, 那么

$$SL(n) = \max_{1\le i\le s}\{p_i^{\alpha_i}\} \ . \tag{1}$$

许多学者对 $SL(n)$的初等性质进行了研究,并取得了许多具有一定意义的研究成果.例如文[2]当 n 是一个素数是,

$$SL(n) = SL(p) = S(p) . \tag{2}$$

其中 $S(n) = \min\{m : n|m!, m\in N\}$ 文[3]中解决了下面的问题

$$SL(n) = S(n), S(n) \ne n ? \ . \tag{3}$$

并证明了 下面的结论:

任何满足上式的整数都可表示成 $n=12$ 或 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$ 其中 $p_1, p_2, p_3,\cdots, p_r\, p$ 是不同的素数且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_r$ 是满足 $p > p_{i_i}^{\alpha_i}\ (i=1,2,\cdots)$ 的正整数. [4]利用 $SL(n)$的定义和性质研究了 F.Smrandache 函数 $SL(n)$与除数函数的混合均值.

收稿日期：2013-04-09

作者简介：朱民(1980-), 男, 助教, 硕士研究生, 河南商丘人, 研究方向:从事网格技术及数论研究. E-mail:flyeagle09@126.com

基金项目：河南省基础与前沿技术研究计划项目(122300410395)

本文的在上述研究成果的基础之上利用初等的方法对 $SL(n)$ 和 $\Lambda(n)$ 进行了研究, 得到一个很好的渐近公式,也就是下面的定理.

定理: 对任意大于1的实数 x ,大于 2 的整数 k , 有渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SL(n)) = x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x}+O(\frac{x^2}{\ln^k x}),$$

其中 $c_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数 $c_1=\dfrac{1}{2}$, 且

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & 若\mathrm{n}=p^{\alpha},p为素数,\alpha\ge 1,\\ 0, & 其他情况.\end{cases}$$

2　定理的证明

在这一部分将使用初等的方法给出定理的证明.在和式 $\sum\limits_{n\le x}\Lambda(n)SL(n))$ 中将区间 $[1,\ x]$ 分成三个集合 A , B 和 C , 其中 $A=\{n:n=p,n\in[1,x]\}$, $B=\{n:pq=n,p>q$ 且 $q\ne 1$, $n\in[1,x]\}$, $C=\{n:n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},n\in[1,x]\}$ 利用 $\Lambda(n)$ 的定义, $[1,\ x]$ 的分法及 $SL(n)$ 的性质知:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)SL(n)=\sum_{n\in A}\Lambda(n)SL(n)+\sum_{n\in B}\Lambda(n)SL(n)+\sum_{n\in C}\Lambda(n)SL(n)\quad . \tag{4}$$

当 $n\in A$ 时 $SL(n)=p$, $\Lambda(n)=\ln p$ 所以

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in A}\Lambda(n)SL(n)=\sum_{p\le x}p\cdot\ln p=\\ &x\ln x\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)\pi(t)dt=\\ &\sum\frac{c_i x^2}{\ln^{i-1}x}-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\ln t+1)[\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i t}{\ln^i t}+O(\frac{t}{\ln^{k+1}t})]dt+O(\frac{x^2}{\ln^k x})=\\ &\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x^2}{\ln^{i-1}x}+O(\frac{x^2}{\ln^k x})\quad .\end{aligned} \tag{5}$$

当 $n\in B$ 时,因为 $pq=n,q\ne 1$ 并且 $p>\sqrt{n}$ 即 $p>q$ 利用 $\Lambda(n)$ 函数的定义知 $\Lambda(n)=0$, 从而

$$\sum_{n\in B}\Lambda(n)SL(n)=0\,; \tag{6}$$

当 $n\in C$ 时, 此时 C 包括以下两种情况, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,则

(1) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},r\ge 2$ 　(2) $n={p_s}^{\alpha},\alpha\ge 2$ 所以当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},r\ge 2$ 　时 $\Lambda(n)=0$; 当 $n={p_s}^{\alpha},\alpha\ge 2$ 时 $\Lambda(n)=\ln p_s$, $SL(n)={p_s}^{\alpha}$ 所以

$$\sum_{n\in C}\Lambda(n)SL(n)=\sum_{{p_s}^{\alpha}}{p_s}^{\alpha}\ln p_s=\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\ \sum_{p_s\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p_s^{\alpha}\ln p_s\ . \tag{7}$$

估计集合 C 中的误差项

$$\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\ \sum_{p_s\le x^{\frac{1}{\alpha}}}p_s^{\alpha}\ln p_s << \sum_{2\le\alpha\le\ln x}\ \sum_{p_s\le x^{\frac{1}{2}}}p_s^{\alpha}\ln p_s << x\ln x^{\frac{1}{2}} << x\ln x\quad . \tag{8}$$

结合(4),(5),(6),(7),(8)得 $\sum_{n\le x}\Lambda(n)SL(n)) = x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x} + O(\frac{x^2}{\ln^k x})$.

这样就完成了定理的证明.

参考文献

[1] F SMARANDACHE. Only Problem , Not Solutions[M]. Chicago: xiquan Publishing House, 1993.
[2] A MURTHY. Some notions on least common multiples[J]. SmarandacheNotions Journal, 2001, 12: 307-309.
[3] LE M H. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.
[4] 吕国亮. 关于 F Smrandache 函数与除数函数的混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 3: 315-318.
[5] TOM M. Apostol.Introduction to Anaylytic Number Theory[M]. NewYork: Springer_verlag, 1976.
[6] ZHANG WENPENG. Research on The Smarandache Problems in Number Theory[J]. Hexis, 2004, 2: 9-11.
[7] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论. [M]. 北京: 北京大学出版社, 1988.
[8] ZHAO JIANTANG. An Arithmetical function and the K-full Number Sequences[J]. Hexis, 2005: 131-134.
[9] 闵嗣鹤, 士键. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

The mean value on a composite fuction involving F.Smarandache LCM fuction

ZHU Min

(School of Computer and Information Technology, Shangqiu Normal College, Shangqiu 476000, P.R.C.)

Abstract: F.Smarandache LCM function $SL(n)$ is defined as the smallest positive integer k such that $n|[1,2,3,\cdots,k]$.

The main purpose of this paper is to use properties of $SL(n)$ and difinition of $\Lambda(n)$ to study the main value formula of

$\Lambda(n)\cdot SL(n)$, that is $\sum_{n\le x}\Lambda(n)SL(n)) = x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^{i-1}x} + O(\frac{x^2}{\ln^k x})$.

Key words: F.Smarandache LCM function; Mangoldt function; main value formula; mean value