DOI:10.13990/j.issnl001-3679.2008.02.008

第26卷 第2期 2008年4月 江西科学 JIANGXI SCIENCE Vol.26 No.2 Apr.2008

文章编号:1001-3679(2008)02-0278-02

一个数论函数与最大素因子函数的混合均值公式

贺艳峰[1,2],齐琼[2]

(1. 西北大学数学系,陕西 西安 710127;2. 延安大学计算机学院,陕西 延安 716000)

摘要:主要目的是用初等方法研究了一个Smarandache函数与最大因子函数的均值,并给出了它的一个渐近公式。

关键词:Smarandache函数;Abel恒等式;Riemann zeta-函数

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

One Hybrid Mean Value Formula Involving Smarandache Function and the Greatest Prime Divisor Function

HE Yan-feng[1,2], QI Qiong[2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Shanxi Xi'an 710127 PRC;
2. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Shanxi Yan'an 716000 PRC)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the hybrid mean value involving Smarandache function and the greatest prime divisor function, and give an asymptotic formula.

Key words: Smarandache function; Abel identity; Riemann zeta-function

1 引言及结论

对任意正整数 n,在文献[1]中 Smarandache 函数 $V(n)$定义为:$V(1)=1$;$n>1$时,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是 n的标准分解式,则 $V(n)=\min_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$,另外,$P(n)$为 n的最大素因子。关于函数 $V(n)$和 $p(n)$,有些学者进行了研究,获得了一些较好的结果。例如,沈虹[2]研究了 $V(n)$与 $p(n)$差的平方均值分布性质,并得到了一个渐近公式:

$$\sum_{n\le x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中,$p(n)$是 n的最小素因子。徐哲峰[3]研究了 $P(n)$的均值分布性质,并得到了一个渐近公式:

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中,$\zeta(n)$为 Riemann zeta-函数,$S(n)=\min\{m:n\mid m!\}$。Chen jianbin[4]利用初等方法证明了对任意的实数 $x>1$,有:

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

收稿日期:2007-11-14;修订日期:2008-01-07

作者简介:贺艳峰(1976-),女,延安大学讲师,西北大学在读研究生,主要从事基础数论研究。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)。

其中, $SL(n)=\min\{k: n\mid[1,2,\cdots,k]\}$。

本文利用初等的方法研究了 $V(n)$ 与 $P(n)$ 的一个混合均值分布,并给出了一个渐近公式。

定理: $$\sum_{n\le x}V(n)P(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $a_i=(i-1)!$ 为可计算的常数。

2 2个简单引理

为了完成定理的证明,需要下面这 2个简单引理。

引理 1: 设 $x>1$ 是实数,则有:

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$$

其中 $a_i=(i-1)!$。

证明:参阅文献[5]的 §3.1的定理 3.2。

引理 2: 设 p 是素数,则有:

$$\sum_{p\le x}p^2=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

证明:由引理 1及文献[6]中 Abel恒等式得:

$$\sum_{p\le x}p^2=x^2\pi(x)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\pi(y)\,dy=x^2\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)dy=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}-\frac{2}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

于是完成了引理 2的证明。

3 定理的证明

对任意的正整数 $n>1$, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式。把区间 $[1,x]$ 的所有正整数 n 分成如下两部分:

A: $\omega(n)=1$, 即就是所有 $n=p^\alpha\le x$ 的正整数,其中 p 是素数, α 是任意正整数;

B: $\omega(n)\ge 2$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数。

下面逐一进行计算:

(1)当 $n\in A$ 时,此时可设 $n=p^\alpha\le x$, 则有 $V(n)=\alpha\cdot p$, 从而由引理 1及引理 2得

$$\sum_{n\in A}V(n)P(n)=\sum_{n\in A}\alpha P^2(n)=\sum_{\substack{\alpha\le\ln x\\ p\le\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha p^2=\sum_{p\le x}p^2+\sum_{\substack{2\le\alpha\le\ln x\\ p\le\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha\cdot p^2=M_1+M_2 \tag{1}$$

由引理 2及 Abel恒等式得

$$M_1=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right) \tag{2}$$

和

$$M_2=\sum_{\substack{2\le\alpha\le\ln x\\ p\le\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha\cdot p^2=\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le\sqrt[\alpha]{x}}\alpha\cdot p^2\le\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\alpha\cdot p^2\ll\sum_{2\le\alpha\le\ln x}\alpha\cdot\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\ll x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^{i-2}x}\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x \tag{3}$$

把式(2)和式(3)代入式(1),得

$$\sum_{n\in A}V(n)P(n)=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)。$$

(2)当 $n\in B$ 时,此时设 $V(n)=\alpha\cdot p$, $n=mp^\alpha$, 且 $p\le P(n)$, 从而有

$$\sum_{n\in B}V(mp^\alpha)P(n)=\sum_{n\in B}\alpha pP(n)\ll\sum_{1\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\sum_{p<m<\frac{x}{p^\alpha}}\alpha P(n)^2\ll\sum_{1\le\alpha\le\ln x}\sum_{p\le x^{\frac{1}{\alpha+1}}}\alpha p^3\cdot\frac{x}{p^\alpha}\ll\sum_{1\le\alpha\le\ln x}\alpha\sum_{p\le x^{\frac{1}{2}}}p\ll x^2\ln x$$

综合式(1)和式(2)得:

$$\sum_{n\le x}V(n)P(n)=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

于是完成了定理的证明。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 沈 虹. 一个新的数论函数及其它的均值分布性质[J]. 纯粹数学与应用数学学报, 2007, 23(2): 235-238.

[3] 徐哲峰. Smarandache函数的均值分布性质[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[4] Chen Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[6] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.