DOI :10.13338/j.issn.1006-8341.2008.03.001

第 21 卷第 3 期 纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报 Vol.21, No.3
2008 年 9 月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2008

* 研究简 报 *
文章编号: 1006-8341(2008)03-0376-02

一个数论函数与最小素因子函数的混合均值

贺艳峰[1,2], 齐 琼[3]

(1. 延安大学 计算机学院, 陕西 延安 716000; 2. 西北大学 数学系, 陕西 西安 710127;
3. 西北政法大学 经济管理学院, 陕西 西安 710063,)

摘要: 设 $n\in\mathbf{N}_+$, Smarandache 函数 $V(1)=1$; 当 $n>1$ 时, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, $V(n)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i\circ p_i\}$. 利用初等方法研究了一个包含 Smarandache 函数与最小素因子函数的混合均值, 并给出了一个有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache 函数; Abel 恒等式; Riemann zeta- 函数
中图分类号: O 156.4 文献标识码: A

1 引言及结论

$\forall n\in\mathbf{N}_+$, 文献[1] 中 Smarandache 函数 $V(n)$ 定义为 $V(1)=1$; $n>1$ 时, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 则 $V(n)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i\circ p_i\}$. 另外, $p(n)$ 为 n 的最小素因子. 关于函数 $V(n)$ 和 $p(n)$, 有些学者进行了研究, 获得了一些较好结果[2-4], 文献[2] 研究了 $V(n)$ 与 $p(n)$ 差的平方均值分布性质, 并得到了一个渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(V(n)-p(n))^2=x^{3/2}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

文献[3] 研究了包含它的对偶函数方程的正整数解; 文献[4] 研究了包含推广形式的函数的均值分布. 本文利用初等的方法研究了 $V(n)$ 与 $p(n)$ 的一个混合均值分布, 并给出了一个渐近公式, 即

定理 1

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)p(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $a_i=(i-1)!$为可计算的常数.

2 引 理

引理 1 设 $x\in\mathbf{R}$, $x>1$, 则有 $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$. 其中 $a_i=(i-1)!$.

引理 1 的证明可参阅文献[5].

引理 2 设 p 是素数, 则有 $\sum\limits_{p\leqslant x}p^2=\frac{1}{3}x^3\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$.

收稿日期: 2007-11-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
通讯作者: 贺艳峰(1976-), 女, 陕西省神木县人, 延安大学讲师, 西北大学在读研究生. E-mail: ydheyanfeng@163.com

证明　由引理 1 及文献[6] 中 Abel 恒等式得

$$\sum_{p\leqslant x}p^2=x^2\pi(x)-2\int_{3/2}^{x}y\pi(y)\mathrm{d}y=$$
$$x^2\circ\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ix}{\ln^i x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-2\int_{3/2}^{x}y\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_iy}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)\mathrm{d}y=$$
$$x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}-\frac{2}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)=$$
$$\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了引理 2 的证明.

3　定理的证明

$\forall n\in\mathbf{N}_+, n>1$, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式. 把区间[1, x] 的所有正整数 n 分成 2 部分:

A: $\omega(n)=1$, 即就是所有 $n=p^{\alpha}\leqslant x$ 的正整数, 其中 p 是素数, $\alpha\in\mathbf{N}_+$;

B: $\omega(n)\geqslant 2$, 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数.

(ⅰ) 当 $n\in A$ 时, 此时可设 $n=p^{\alpha}$, 则有 $V(n)=\alpha\circ p$, 从而由引理 1 及引理 2 得

$$\sum_{n\in A}V(n)p(n)=\sum_{n\in A}\alpha\circ p^2(n)=\sum_{\substack{\alpha\leqslant\ln x\\ p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha\circ p^2=\sum_{p\leqslant x}p^2+\sum_{\substack{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x\\ p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha\circ p^2=M_1+M_2.\tag{1}$$

由 Abel 恒等式得

$$M_1=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{2}$$

$$M_2=\sum_{\substack{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x\\ p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha\circ p^2=\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\ \sum_{p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}\alpha\circ p^2\leqslant\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\alpha\circ p^2\ll$$
$$\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha\circ\left(x^{3/2}\circ\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\ll x^{3/2}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{\ln^{i-2}x}\ll x^{3/2}\ln x.\tag{3}$$

把式(2)和(3)代入式(1), 得 $\displaystyle\sum_{n\in A}V(n)p(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$.

(ⅱ) 当 $n\in B$ 时, 此时设 $V(n)=\alpha\circ p$, $n=mp^{\alpha}$, 且 $p\geqslant p(n)$ 从而有

$$\sum_{n\in B}V(mp^{\alpha})p(n)=\sum_{n\in B}\alpha\circ p\circ\rho(n)\ll\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\ \sum_{p\leqslant x^{1/(\alpha+1)}}\ \sum_{p<m\leqslant x/p^{\alpha}}\alpha\circ p^2\ll$$
$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\ \sum_{p\leqslant x^{1/(\alpha+1)}}\alpha\circ p^2\circ\frac{x}{p^{\alpha}}\ll\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha\sum_{p\leqslant x^{1/2}}p\ll x^2\ln x.$$

综合以上(ⅰ)和(ⅱ)得

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)p(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了定理 1 的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 沈虹. 一个新的数论函数及其他的均值分布性质[J]. 纯粹数学与应用数学学报, 2007, 23(2): 235-238.

[3] 冀永强. 数论函数及其方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2006, 19(2): 5-7.

[4] 朱敏慧. 一个新的算术函数及其渐近公式[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(4): 357-360.

[5] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[6] TOM M A Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

(下转第 380 页)

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-5-5^2-\cdots-5^m-\left[\frac{a_m}{2}\right]5^m-\left[\frac{a_{m-1}}{2}\right]5^{m-1}-\cdots-\left[\frac{a_1}{2}\right]5-\left[\frac{a_0}{2}\right]-1=$$

$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-1.$$

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}=\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1-\sum_{\substack{2|n\\ n\leqslant x}}1=$$

$$[x]-\frac{5}{4}(5^m-1)-\sum_{i=0}^{m}\left[\frac{a_i}{2}\right]5^i-5\times 10^{m-1}-5\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)10^{i-1}-\left[\frac{a_0}{2}\right]-2.$$

于是完成了定理1的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] LIU Yan-ni. On the smarandache pseudo number sequence[J]. 数学季刊, 2006, 21(4): 581-584.

[3] APPOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

On the Smarandache pseudo-even number

WU Nan[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China;

2. Department of Media Engineering, Weinan Teachers′ College, Weinan, Shaanxi 714000, China)

Abstract: The property of sequence of the Smarandache pseudo-even number was studied. Using the elementary and combinational methods, an exactly calculating formula for the number of the Smarandache pseudo-even numbers was given. The calculating problem for the number of the Smarandache pseudo-even numbers is solved completely.

Key words: Smarandache pseudo-even number; sequence; calculating formula

编辑、校对:黄燕萍

(上接第377页)

One hybrid mean value formula involving Smarandache function and the least prime divisor function

HE Yang-fen[1,2], *QI Qiong*[3]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan′an Univesity, Yan′an, Shaanxi 716000, China;

2. Department of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China;

3. College of Economics and Business Administration, Northwest University of Politics and Law, Xi′an 710063, China)

Abstract: Let n be any positive integer, Smarandache function $V(1)=1$, and if $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ is the canonical prime fractorzation of n, then $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i\circ p_i\}$. The hybrid mean value involving Smarandache function and the least prime divisor function is studied by using the elementary methods and an interesting asymptotic formula is obtained.

Key words: Smarandache function; Abel′s identity; Riemann zeta-function

编辑、校对:黄燕萍