2008年12月
第24卷 第4期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Dec. 2008
Vol.24 No.4

一个新的 Smarandache 函数及其均值

李梵蓓

(内蒙古财经学院统计与数学学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘 要：对任意正整数 $n \geq 3$, 我们定义算术函数 $C(n)$ 为最大的正整数 $m \leq n-2$ 使得 $n\ |C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. 即就是 $C(n) = \max\{m:\ m \leq n-2,\ n|\ C_n^m\}$, 并规定 $C(1) = C(2) = 1$. 本文的主要目的是利用初等及解析方法研究这一函数的均值分布问题, 并给出几个有趣的均值公式及渐近式.

关 键 词：新的 Smarandache 函数；均值；渐近公式；解析方法

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2008)04-0682-04

1 引言及结论

众所周知, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n) = \min\{m:\ m \in \mathbb{N},\ n|m!\}$. 在文 [1] 中, Smarandache 教授建议人们研究这个函数的各种性质！关于这一内容, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果！参阅文 [2-5]. 此外, 关于函数 $S(n)$ 的推广及其一般化, 也有各种各样的形式. 例如, 文 [6] 引入了 $S(n)$ 的对偶函数 $S^*(n)$ 如下：$S^*(n) = \max\{m:\ m \in \mathbb{N},\ m!|n\}$. 在文 [7] 中研究了 $S^*(n)$ 的均值性质, 并证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x} S^*(n) = (\mathrm{e}-1)x + O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right)$$

及恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

其中 $\mathrm{e} \doteq 2.718\ 281\ 828\ 459$ 为常数.

此外, 文 [8] 还引入了另一个新的算术函数 $C(n)$ 如下：$C(1) = 1$, $C(2) = 1$, $C(3) = 1$, 当 $n > 3$ 时, $C(n)$ 定义为最大的正整数 $m \leq n-2$ 使得 n 整除 $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. 即 $C(n) = \max\{m:\ m \leq n-2,\ n|\ C_n^m\}$. 同时文 [8] 中还列举了 $C(n)$ 的一些简单性质. 如当 $n \geq 2$ 时, 有计算公式: $C(2n-1) = 2n-3$. 然而对于偶数 $n \geq 4$, $C(n)$ 的计算是比较复杂的, 没有一个确切的计算公式. 例如 $C(6) = 1$, $C(12) = 7$, $C(60) = 53, \cdots$. 事实上容易证明对任一充分大的正整数 M, 一定存在一个正整数 n 使得 $C(n) \leq n - M$. 因此 $n - C(n)$ 可以任意大. 那么我们自然会问 $C(n)$ 的值分布是否具有规律性? 本文的主要目的就是利用初等及解析方法研究这一问题, 并证明下面三个结论:

定理 1 对于任意给定的正整数 $k > 2$, 一定存在正整数 n 使得

$$n - C(n) \geq k$$

收稿日期：2007-09-10.

基金项目：国家自然科学基金 (60472068).

作者简介：李梵蓓 (1953-), 女, 副教授, 研究方向: 基础数学.

定理 2　对于任意正整数 $n \geq 4$, 我们有渐近公式

$$C(n) = n + O\left(\exp\left(\frac{c_1 \cdot \ln n}{\ln\ln n}\right)\right)$$

其中 $\exp(y) = e^y$, $c_1 > 0$ 是一个常数.

定理 3　对于任意实数 $N \geq 4$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n \leq N} C(n) = \frac{1}{2} \cdot N^2 + O\left(N \cdot \ln N\right)$$

显然定理 1 说明 $|n - C(n)|$ 是无界的. 定理 2 给出了 $C(n)$ 的一个渐近公式, 也就是证明了当 n 充分大时有 $C(n) \sim n$. 当然也可以通过定理 2 给出 $\sum_{n \leq N} C(n)$ 的一个均值公式, 但是这时所产生的误差项非常大, 因此我们没有采取由定理 2 直接推出定理 3 的办法, 而是通过解析方法并借助于一些新的技巧给出了定理 3 中更强的结论!

2　定理的证明

这节我们利用初等及解析方法给出定理的直接证明. 首先证明定理 1. 对于任意大的正整数 k, 取 $n = m \cdot (2k)!$, 于是对任意正整数 $2 \leq i \leq k$ 有 $(n - i,\ i!) = i$, $(n-1,\ i!) = 1$ 以及 $\left(\frac{n-j}{j},\ i\right) = 1$ 对所有 $1 \leq j \leq i - 1$ 成立. 于是 $\left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{n-i+1}{i-1},\ i\right) = 1$, 从而可知

$$\frac{1}{n} \cdot C_n^{n-i} = \frac{1}{n} \cdot C_n^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = \frac{1}{i} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{n-i+1}{i-1}$$

不可能为整数, $i = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ k$. 于是由 $C(n)$ 的定义可得 $C(n) \leq n - k$, 或者 $n - C(n) \geq k$. 因此可得 $n - C(n)$ 是无界的, 从而完成了定理 1 的证明.

现在我们证明定理 2. 显然 $C(1) = C(2) = C(3) = 1$, 于是不失一般性我们假定 n 充分大. 首先当 n 为奇数时, 注意到 $C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = n \cdot \frac{n-1}{2}$, 而 $\frac{n-1}{2}$ 为整数, 所以 n 整除 C_n^{n-2}, 从而有渐近公式

$$C(n) = n - 2 = n + O\left(\exp\left(\frac{c_1 \cdot \ln n}{\ln\ln n}\right)\right)$$

当 n 为偶数时, 设 $k \geq 2$ 是最小的整数使得 $(k,\ n) = 1$. 现在我们证明 n 整除 $C_n^k = C_n^{n-k}$. 事实上注意到

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$$

或者

$$k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$$

由上式并注意 $(n,\ k) = 1$ 我们立刻得到 n 整除 $C_n^k = C_n^{n-k}$. 所以由 $C(n)$ 的定义有 $n - 2 \geq C(n) \geq n - k$. 或者

$$C(n) = n + O(k) \tag{1}$$

另一方面, 设 x 为整数, $\phi(n,x)$ 表示区间 $[2,x]$ 中与 n 互素的正整数的个数. 则由 Möbius 函数的性质可知

$$\begin{aligned}\phi(n,x) &= \sum_{\substack{2\le k\le x\\(n,\ k)=1}} 1 = \sum_{k\le x}\sum_{d|(k,\ n)}\mu(d) - 1 = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{k\le\frac{x}{d}} 1 - 1\\ &= \sum_{d|n}\mu(d)\left\{\frac{x}{d}+O(1)\right\} - 1 = x\cdot\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} + O\left(2^{\omega(n)}\right)\\ &= \frac{\phi(n)}{n}\cdot x + O\left(2^{\omega(n)}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\phi(n)$ 表示 Euler 函数, $\omega(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的个数.

上式说明存在一个确定的正常数 M 使得当 $x\ge M\cdot\frac{n}{\phi(n)}\cdot 2^{\omega(n)}$ 时, 一定有 $\phi(n,x)\ge 1$. 所以对 (2) 式中的 k 一定有 $k\le x$. 从而由 (1) 及 (2) 式并注意到估计式

$$\omega(n) \ll c_0\cdot\frac{\ln n}{\ln\ln n}$$

我们立刻得到渐近公式

$$C(n) = n + O\left(\exp\left(\frac{c_1\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\right)$$

其中 $\exp(y)=e^y$, $c_1>0$ 是一个常数. 于是证明了定理 2.

为证明定理 3, 我们应用 (2) 式立刻得到 k 的上界估计式

$$k \ll \frac{n}{\phi(n)}\cdot 2^{\omega(n)}$$

由此估计及 (1) 式我们有

$$\sum_{n\le N}(n-2) \ge \sum_{n\le N} C(n) \ge \sum_{n\le N}\left(n + O\left(\frac{n}{\phi(n)}\cdot 2^{\omega(n)}\right)\right) \tag{3}$$

此外, 注意到当复变数 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时有恒等式

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\omega(n)}}{n^{s-1}\cdot\phi(n)} &= \prod_p\left(1+\frac{2}{p^s\left(1-\frac{1}{p}\right)}+\frac{2}{p^{2s}\left(1-\frac{1}{p}\right)}+\cdots+\cdots\right)\\ &= \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\prod_p\left(1+\frac{2}{(p^s+1)(p-1)}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\prod\limits_p$ 表示对所有素数求积, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

注意到 (4) 式, 利用熟知的 Perron 公式 [9-10] 及 Riemann zeta- 函数的性质我们不难得到渐近公式

$$\sum_{n\le N}\frac{n\cdot 2^{\omega(n)}}{\phi(n)} = \frac{15}{\pi^2}\cdot x\cdot\ln x + A\cdot x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \tag{5}$$

其中 A 为可计算的常数, ϵ 为任意给定的正数.

结合 (3) 及 (5) 式我们立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\leq N} C(n) = \frac{1}{2}\cdot N^2 + O\left(N\cdot \ln N\right)$$

于是完成了定理 3 的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1):76-79.

[3] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5):1009-1012.

[4] Le Maohua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14:180-182.

[5] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):205-208.

[6] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11:202-212.

[7] Xue Shejiao. On the Smarandache dual function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1):29-32.

[8] Sandor J. Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Arithmetic Functions [M]. Rehoboth, American Research Press, 2002.

[9] 潘承洞、潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[10] Ivić I. The Riemann zeta -function [M]. New York:John Wiley & Sons, 1985.

A new Smarandache function and its mean value

LI Fan-bei

(School of Mathematics and Statistics, Inner Mongolia Finance and Economics College
Hohhot 010051, China)

Abstract: For any positive integer $n \geq 3$, we define the arithmetical function $C(n)$ as the largest positive integer $m \leq n-2$ such that $n|C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$. That is, $C(n) = \max\{m:\ m\leq n-2,\ n|C_n^m\}$, and $C(1) = C(2) = 1$. In reference [9], Jozsef Sandor introduced this function, and asked us to study the properties of $C(n)$. About this problem, it seems that none had studied it yet, at least we have not seen any related papers before. The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the mean value distribution problem of $C(n)$, and to give several interesting mean value formula and asymptotic formula for it.

Keywords: new Smarandache function, mean value, asymptotic formula, analytic method.

2000MSC: 11B83