第 41 卷 第 3 期 内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版） Vol. 41 No. 3
2012 年 5 月 Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition) May 2012

一个新的 Smarandache 函数的均值

李毅君

（西安石油大学 理学院，陕西 西安 710065）

摘 要：对任意正整数 n，定义一个新的 Smarandache 函数 $D(n)=\max\{ab: a,b\in N, n=\frac{a(a+1)}{2}+b\}$，其中 N 为所有正整数集合. 利用初等方法和 $D(n)$ 的性质，研究了函数 $D(n)$ 的均值性质，并给出该函数各种均值的一个较强的渐近公式.

关键词：Smarandache 函数；均值；渐近公式；初等方法

中图分类号：O 156.4 文献标志码：A 文章编号：1001—8735(2012)03—0244—03

1 引言及结论

对任意正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 及伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 分别定义为最小的正整数 h 及最小的正整数 k 使得 $n\mid h!$ 及 n 整除 $1+2+3+\cdots+k$，或者 $S(n)=\min\{h: h\in N, n\mid h!\}$ 及 $Z(n)=\min\{k: k\in N, n\mid \frac{k(k+1)}{2}\}$，其中 N 表示所有正整数之集合. 从 $S(n)$ 及 $Z(n)$ 的定义容易推出它们的前几项值分别为 $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, \cdots$；$Z(1)=1, Z(2)=3, Z(3)=2, Z(4)=7, Z(5)=4, Z(6)=3, Z(7)=6, Z(8)=15, \cdots$. 这两个函数是美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 教授在他所著的 *Only problems, not solutions* 一书中提出的. 关于 $S(n)$ 及 $Z(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，获得了不少有意义的结果[1-5]. 例如，K. Kashihara[2] 建议研究方程 $Z(n)+1=S(n)$ 及 $Z(n)=S(n)$ 的可解性，文献[3]解决了该问题，给出了这两个方程的所有正整数解.

陆亚明[4] 研究了方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=\sum_{i=1}^{k}S(m_i)$$

的可解性，利用解析数论中著名的三素数定理证明了对任意正整数 $k\geqslant 3$，该方程有无穷多组正整数解 $(m_1+m_2+,\cdots,+m_k)$，其中 $S(n)$ 为 Smarandache 函数.

徐哲峰[5] 研究了 $S(n)$ 的值分布问题，证明了渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子，$\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

李粉菊等[6] 证明了对任意素数 $p\geqslant 17$ 和任意不同的正整数 a 及 b，有估计式 $S(a^p+b^p)\geqslant 8p+1$. 王锦瑞[7] 讨论了 Smarandache 函数对费尔马数的下界估计问题，证明了对任意正整数 $n\geqslant 3$ 有估计式

$$S(F_n)=S(2^{2n}+1)\geqslant 8\cdot 2^n+1,$$

其中 $F_n=2^{2n}+1$ 为著名的费尔马数.

此外，A. W. Vyawahare 等[8] 还引入一个几乎伪 Smarandache 函数，并讨论了它的各种性质. 李喜罕[9] 研究了一个新的伪 Smarandache 函数 $C(n)=\min\{a+b: a,b\in N, n\mid \frac{a(a+1)}{2}+b\}$ 的均值性质，并证明

收稿日期：2012-01-16

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194)

作者简介：李毅君(1978－)，女，陕西省西安市人，西安石油大学讲师，主要从事基础数学的教学与研究，E-mail: liyijun2009@126.com.

了当实数 $x>1$ 时有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}C(n)=\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+O(x),\quad \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{C(n)}=\sqrt{2x}\cdot\ln 2+O(\ln x).$$

受文献[9]的启发，本文引入一个新的 Smarandache 函数 $D(n)=\max\{ab:a,b\in N,n=\frac{a(a+1)}{2}+b\}$，利用初等方法研究它的算术性质，给出该函数各种均值的一个较强的渐近公式.

定理 1　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}D(n)=\frac{4\sqrt{6}}{45}\cdot x^{\frac{5}{2}}+O(x^2).$$

定理 2　对任意实数 $x>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{C(n)}{D(n)}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\ln x+O(1).$$

显然，定理 1 和定理 2 的余项是非常粗糙的，经过仔细计算还有进一步改进的余地，但由于计算比较复杂，所以没有做精确处理.

2　定理的证明

定理 1 的证明　由 $D(n)$ 的定义，不难计算出 $D(n)$ 的前几项值为 $D(1)=0,D(2)=1,D(3)=2,D(4)=3,D(5)=4,D(6)=6,D(7)=8,D(8)=10,D(9)=12,D(10)=14,\cdots$. 对任意正整数 $n>10$，现在确定 $D(n)$. 设正整数 m 满足不等式 $m(m+1)/2\leqslant n$，此时由 $D(n)$ 的定义不难推出，当 $a=m$ 时，$b=n-\frac{m(m+1)}{2}$ 及 $D(n)=\left(n-\frac{m(m+1)}{2}\right)\cdot m$. 设 $f(x)=(n-x(x+1)/2)\cdot x$，其中 $1\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$，于是有 $f'(x)=n-\frac{1}{2}(3x^2+2x)$. 令 $f'(x)=0$，则 $x_1=\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}$，$x_2=\frac{-\sqrt{6n+1}-1}{3}$ 为 $f'(x)=0$ 的两个根. 因为 $f''(x)=-3x-1$，所以 $f''\left(\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}\right)<0$. 因此 $x=\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值，即 $f\left(\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}\right)$ 极大. 又因为 $f(1)=n-1$，$f\left(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right)=0$，当 n 较大时，

$$f\left(\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}\right)=\frac{2n}{9}(\sqrt{6n+1}-1)-\frac{(\sqrt{6n+1}-1)^2}{54}>n-1.$$

由最大值的定义及性质可知，函数 $f(x)$ 在区间 $\left[1,\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}\right)$. 由 $D(n)$ 的定义知 b 为整数，因此有 $b=\frac{\sqrt{6n+1}-1}{3}+O(1)=\frac{\sqrt{6n+1}}{3}+O(1)$，或

$$D(n)=\left(n-\frac{b(b+1)}{2}\right)\cdot b=\frac{2\sqrt{6}}{9}\cdot n^{\frac{3}{2}}+O(n).\tag{1}$$

于是由(1)式及 Euler 求和公式[10-11]，立刻推出

$$\sum_{n\leqslant x}D(n)=\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}n^{\frac{3}{2}}+O(n)\right)=\frac{2\sqrt{6}}{9}\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{3}{2}}+O\left(\sum_{n\leqslant x}n\right)=\frac{2\sqrt{6}}{9}\int_1^x x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+O(x^2)=\frac{4\sqrt{6}}{45}x^{\frac{5}{2}}+O(x^2).$$

于是证明了定理 1.

定理 2 的证明　由文献[9]知有恒等式

$$C(n)=m+n-\frac{m(m+1)}{2}=n-\frac{(m-1)m}{2}=m+i,\tag{2}$$

其中 m 满足不等式 $m(m+1)\leqslant n<(m+1)(m+2)/2,0\leqslant i\leqslant m$.

下面应用(2)式来完成定理 2 的证明. 对任意实数 $x>1$，显然存在唯一的正整数 M 满足不等式 $M(M+1)/2\leqslant x<(M+1)(M+2)/2$. 由此不等式不难推出

$$M=\left[\sqrt{2x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right], \tag{3}$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

注意到(1)式和(3)式,于是由(2)式有

$$\sum_{1<n\leqslant x}\frac{C(n)}{D(n)}=\sum_{k=2}^{M-1}\sum_{k(k+1)/2\leqslant n<(k+1)(k+2)/2}\frac{C(n)}{D(n)}+\sum_{M(M+1)/2\leqslant n<x}\frac{C(n)}{D(n)}+O(1)=$$

$$\sum_{k=2}^{M-1}\sum_{k(k+1)/2\leqslant n<(k+1)(k+2)/2}\frac{n-(k-1)k/2}{2\sqrt{6}/9\cdot n^{\frac{3}{2}}+O(n)}+O\Big(\sum_{M(M+1)/2\leqslant n<x}\frac{n-(M-1)M/2}{2\sqrt{6}/9\cdot n^{\frac{3}{2}}+O(n)}\Big)=$$

$$\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{k+i}{\frac{\sqrt{3}}{9}k^{3}}+O\Big(\frac{M^{2}}{M^{3}+O(M^{2})}\Big)+O(1)=\sum_{k=1}^{M-1}\frac{9}{\sqrt{3}\cdot k^{3}}\Big(k(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}\Big)+O(1)=$$

$$\frac{27}{2\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{M-1}\frac{1}{k}+O(1)=\frac{9\sqrt{3}}{2}\ln M+O(1)=\frac{9\sqrt{3}}{2}\ln\Big(\sqrt{2x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\Big)+O(1)=\frac{9\sqrt{3}}{4}\ln x+O(1).$$

于是完成了证明定理2的证明.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. Erhus University Press, USA, 1996.

[3] 刘燕妮,李玲,刘宝利. Smarandache未解决的问题及其新进展[M]. High American Press, 2008.

[4] Lu Yaming. On the solutions of an equation involiung the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[5] 徐哲峰. Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[6] 李粉菊,杨畅宇. 关于Smarandache函数的一个下界估计[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2011, 41(4): 377-379.

[7] Jinrui Wang. On the Smarandache function and the Fermat numbers [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 25-8.

[8] Vyawahare A W, Purohit K M. Near pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(1-3): 36-61.

[9] 李喜罕. 一个新的伪Smarandache函数及其它的均值[J]. 西安工程大学学报, 2012, 26(1): 105-107.

[10] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社, 2007.

[11] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer Verlag, 1976.

On the Mean Value of a New Smarandache Function

LI Yi-jun

(*College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an* 710065, *China*)

Abstract: For any positive integer n, a new Smarandache function $D(n)$ is defined as the largest positive integers ab such that $n=\frac{a(a+1)}{2}+b$. That is, $D(n)=\max\{ab: a, b\in N, n=\frac{a(a+1)}{2}+b\}$, where N denotes the set of all positive integers. Using the elementary method and the properties of the function $D(n)$, the mean value properties of $D(n)$ are studied, several interesting mean value formulae are given, and an exact asymptotic formulae for the various mean value of the function $D(n)$ is obtained.

Key words: a new Smarandache function; mean value; asymptotic formula; elementary method

【责任编辑 陈汉忠】