第 10卷 第 13期 2010年 5月
1671-1815(2010)13-3171-02

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 13 May 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

一个新的 Smarandache数列

杨明顺
(渭南师范学院 数学与信息科学系,渭南 714000)

摘 要 运用解析数论方法,利用两个引理以及阿贝尔恒等式研究一个新的 Smarandache数列的均值问题,给出一个新的渐进公式。这个渐进公式会对此数论函数的渐近性质的研究有一定的促进作用。

关键词 简单数 Smarandache数列 均值 渐进公式
中图法分类号 O156.4; **文献标志码** A

对于一个正整数 n,如果其所有真因子的积小于或等于 n时,称为简单数。例如:2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,17,19,21,…就是一些简单数。令 A表示所有简单数的集合, Smarandache数列 $sopfr(n)$[1]定义为:$sopfr(n)=\sum_{p|n} p$。

1 引理及其证明

为了更好地完成对定理的证明,首先引入以下两个引理。

引理 1 设 $k\geqslant 0$, $x\geqslant 3$, p表示一个质数,那么

$$\sum_{p\leqslant x} p^k=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)。$$

证明 由 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$[2]及阿贝尔恒等式[3]可得:

$$\sum_{p\leqslant x} p^k=\pi(x)x^k-\int_1^x \pi(t)kt^{k-1}\,dt=\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)\tag{1}$$

$$-k\int_2^x\frac{t^k}{\ln t}dt-k\int_2^x\frac{t^k}{\ln^2 t}dt+O\left(\int_2^x\frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right)=$$

$$\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-\frac{k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}-\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\int_2^x\frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right)=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)\tag{2}$$

证毕。

引理 2 令 p和 q都是质数,那么

$$\sum_{pq\leqslant x} p=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)\tag{3}$$

这里的 C_1和 C_2为可计算常数。

证明 当 $|x|<1$时,

有$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m+\cdots$,那么

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} p\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}} 1=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} p\left(\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)}+\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{\frac{x}{p}}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right)=\frac{x}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right)+\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+\cdots+\frac{\ln^{m-1} p}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right)+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x}{\ln^3\frac{x}{p}}\right)=$$

$$B_1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}+B_2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^4 x}\right)\tag{4}$$

2010年 2月 2日收到 国家自然科学基金(10671155)、陕西省科技厅基金(SJ08A22)、陕西省教育厅基金(09JK432)和渭南师范学院教改项目(JG200903)资助
作者简介:杨明顺(1964—),陕西渭南人,副教授,研究方向:数论。

这里的 B_1 和 B_2 是可计算常数。从而

$$\sum_{q\le\sqrt{x}} 1 \sum_{p\le x/q} p = \sum_{q\le\sqrt{x}} \left(\frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{2(\ln x - \ln q)} + \frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{4(\ln x-\ln q)^2} + O\left(\frac{\left(\frac{x}{q}\right)^2}{(\ln x - \ln q)^3}\right)\right) = \frac{x^2}{2\ln x}\sum_{q\le\sqrt{x}}\frac{1}{q^2}\left(1+\frac{\ln q}{\ln x}+\frac{\ln^2 q}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m q}{\ln^m x}+\cdots\right) + \frac{x^2}{4\ln^2 x}\sum_{q\le\sqrt x}\frac{1}{q^2}\left(1+2\frac{\ln q}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1} q}{\ln^{m-1} x}+\cdots\right) + O\left(\sum_{q\le\sqrt x}\frac{x^2}{q^2\ln^3\frac{x}{p}}\right) = \frac{x^2}{2\ln x}\sum_q \frac{1}{q^2} + \frac{x^2}{\ln^2 x}\left(\frac12\sum_q\frac{\ln q}{q^2}+\frac14\sum_q\frac{1}{q^2}\right)+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right) \tag{5}$$

从式(4)—(5)可得

$$\sum_{pq\le x} p = \sum_{p\le\sqrt x} p\sum_{q\le x/p} 1 + \sum_{q\le\sqrt x} 1\sum_{p\le x/q} p - \left(\sum_{p\le\sqrt x} p\right)\left(\sum_{q\le\sqrt x}1\right) = C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right) \tag{6}$$

这里的 C_1 和 C_2 是可计算常数,证毕。

2 结论及其证明

定理 对任意实数 $x\ge 1$,有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} \mathrm{sop}(r(n)) = A_1\frac{x^2}{\ln x}+A_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)。$$

这里的 A_1, A_2 可计算常数.

证明 从引理 1和引理 2可得

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} \mathrm{sop}(r(n)) = \sum_{p\le x}\mathrm{sop}(r(p)) + \sum_{p^2\le x}\mathrm{sop}(r(p^2)) + \sum_{p^3\le x}\mathrm{sop}(r(p^3)) + \sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}}\mathrm{sop}(r(pq)) = \sum_{p\le x} p + 2\sum_{p^2\le x} p + 3\sum_{p^3\le x} p + 2\sum_{\substack{pq\le x\\ p\ne q}} p = \sum_{p\le x} p + 3\sum_{p^3\le x} p + 2\sum_{pq\le x} p = \frac{x^2}{\ln x}\left(C_1+\frac12\right) + \frac{x^2}{\ln^2 x}\left(C_2+\frac14\right) + O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right) = A_1\frac{x^2}{\ln x}+A_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)$$

证毕。

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problem. Chicago: Xiquan Publ House, 1993

2 张文鹏. 初等数论. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007

3 闵嗣鹤, 严世健. 初等数论(第三版). 北京: 高等教育出版社, 2003

4 Earls J. A note on the Smarandache divisors of divisors sequence and two similar sequences. Smarandache Notions Journal, 2004; 14: 274—275

On A New Smarandache Sequence

YANG Ming-shun

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan 714000, P. R. China)

[Abstract] The main purpose is using the method of analytic arithmetic to study the mean value properties of a new Smarandache sequence with two lemmas, Abel identity and the concept of simple numbers. Finally, an asymptotic formula is obtained. The discusstion of asymptotic properties of the new Smarandache sequence will have well development to those of arithmetical function and give convenience to the mean value properties of function.

[Key Words] simple numbers smarandache sequence asymptotic formula