DOI:10.13548/j.sxzz.2013.05.024

Vol. 33 (2013)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类 Smarandache 方程的可解性问题

陈 斌
(渭南师范学院数学系, 陕西 渭南 714000)

摘 要: 本文研究了包含经典的 Euler 函数与 Smarandache 函数的方程. 利用初等数论以及分析的方法, 给出了此类方程解的一般形式, 获得了几个有趣的结果, 推广和改进了此类方程的已有结果.

关 键 词: Smarandache 函数;Euler 函数; 方程; 可解性
MR(2010) **主题分类号**: 11D72 **中 图 分 类 号**: O156.5
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2013)05-0923-06

1 引言及结论

对于任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义见文献 [1], 存在最小正整数 m 使得 $n|\,m!$, 即就是有

$$S\,(n) = \min\{m : m \in N, n|m!\}.$$

它的各种性质是数论及其应用领域中一个十分引人关注的研究课题 [10−20]. 而对于正整数 n, 设 $\phi\,(n)$ 是 n 的 Euler 函数, 这里 $\phi\,(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数 [3]. 关于这个经典的函数, 很多学者都对其进行了研究, 得到了一些较好的结果 [3−9]. 关于 Smarandache 函数 $S\,(n)$ 与 Euler 函数的方程:

$$S(n^k) = \phi(n). \tag{1}$$

有一些学者对这个函数方程进行了一些研究, 具体的讲就是给出了 k ($k \leqslant 15$) 为较小的具体正整数时, 方程 (1) 的正整数解. 例如文献 [10] 证明了: 当 $k = 1$ 时, 方程 (1) 仅有解. 文献 [11] 对 $k = 2, 3, 4$ 时的解进行了讨论, 得出: 当 $k = 2$ 时方程 (1) 解为 $n = 1, 24, 50$ 及当 $k = 3$ 时方程 (1) 解为 $n = 1, 48, 98$, 而当 $k = 4$ 时, 方程 (1) 有解 $n = 1$. 本文主要寻求这类方程在指数为偶数时, 即:

$$S(n^{2k}) = \phi(n) \tag{2}$$

的它们解的一般形式, 在这个发现的过程中, 得到了其满足特定条件下的 k 的一些解的一般形式, 即得到了以下定理.

定理 1 设 k 为任意的正整数, 若 $4k + 1$ 为素数, 则 $n = (4k + 1)^2$ 和 $n = 2(4k + 1)^2$ 都是方程 $S(n^{2k}) = \phi(n)$ 的解.

*收稿日期: 2012-11-28 接收日期: 2013-01-23
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11071194); 陕西省科技厅自然科学基金项目 (2012JM1021); 陕西省教育厅自然科学科研计划项目资助 (12JK0880); 陕西省军民融合研究院基金项目 (12JMR18); 渭南师范学院科研基金项目 (12YKS024).
作者简介: 陈斌 (1979–), 男, 陕西咸阳, 讲师, 主要从事数论及其应用研究. E–mail:ccbb3344@163.com.

定理 2 设 $p=4m+1$ 为素数, $m\in N^+$, $p\geqslant 5$. 若 $p+2$ 也是素数, 则 $n=p^2(p+2)$ 和 $n=2p^2(p+2)$ 都是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解, 而 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 都不是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解, 其中 $k=\frac{1}{4}(p-1)(p+2)$.

定理 3 设 p 为任意素数, $p\geqslant 5$. 若 $p+2$ 也是素数, 则 $n=p(p+2)^2$ 和 $n=2p(p+2)^2$ 及 $n=p^2(p+2)$ 和 $n=2p^2(p+2)$ 都不是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解, 其中 $k=\frac{1}{4}(p-1)(p+1)$.

定理 4 设 k 为任意的正整数, 当 $k=1$ 时, $n=2^{k+2}\times 3$ 是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解; 而当 $k\geqslant 2$ 时, $n=2^{k+2}\times 3$ 不是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解.

注 由定理 1 知, $n=25,50$ 都是 $S(n^2)=\phi(n)$ 的解. $n=289,578$ 都是 $S(n^4)=\phi(n)$ 的解. 这些结果对文献 [10] 和 [11] 进行了补充和改进.

2 几个引理及证明

为了完成定理的证明, 需引入以下引理.

引理 1[2] 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是正整数 n 的标准分解式, 则有 $\phi(n)=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$.

引理 2[11] 若正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 则

$$S(n)=\max\left\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_s^{\alpha_s})\right\}.$$

引理 3[11] 对于素数 p 和正整数 k, 有 $S(p^\lambda)\leqslant\lambda p$. 特别地, 当 $\lambda<p$ 时, 有 $S(p^\lambda)=\lambda p$.

引理 4[12] 设 p 为素数, λ 为任意正整数, 那么有

$$2\lambda(p-1)+1\leqslant S(p^{2\lambda})\leqslant(2\lambda+1+\log_p 2\lambda)(p-1)+1.$$

引理 5[19] 若 $p+q$ 为素数, 则当 $1\leqslant\lambda\leqslant(p+q)(p+q+1)$ 时,

$$S((p+q)^\lambda)=(\lambda-[\frac{\lambda}{p+q+1}])(p+q),$$

其中 $[\frac{\lambda}{p+q+1}]$ 表示对实数 $\frac{\lambda}{p+q+1}$ 取整.

3 定理的证明

定理 1 的证明 对任意的正整数 k, 若 $4k+1$ 为素数, 当 $n=(4k+1)^2$ 时, 则

$$S(n^{2k})=S(((4k+1)^2)^{2k})=S((4k+1)^{4k}).$$

由引理 3 知

$$S(n^{2k})=S((4k+1)^{4k})=4k(4k+1).$$

而由引理 1 知

$$\phi(n)=\phi((4k+1)^2)=(4k+1)(4k+1-1)=4k(4k+1),$$

因此 $4k+1$ 为素数时, $n=(4k+1)^2$ 是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解.

当 $n=2\left(4k+1\right)^2$ 时, 由引理 2 知

$$S(n^{2k})=S((2(4k+1)^2)^{2k})=\max\{S(2^{2k}),S((4k+1)^{4k})\}=S((4k+1)^{4k})=4k(4k+1),$$
$$\phi(n)-\phi(2(4k+1)^2)=\phi(2)\phi((4k+1)^2)=(2-1)(4k+1)(4k+1-1)=4k(4k+1),$$

所以 $4k+1$ 为素数时, $n=2(4k+1)^2$ 也是方程 $S(n^{2k})=\phi(n)$ 的解.

定理 2 的证明 当 $n=p^2(p+2)$ 时,

$$S(n^{2k})=S((p^2(p+2))^{2k})=\max\{S(p^{4k}),S((p+2)^{2k})\},$$

由 $4k=(p-1)(p+2)<p(p+1)$, 根据引理 5, 可知

$$\begin{aligned}S(p^{4k}) &= (4k-[\frac{4k}{p+1}])p=\{(p-1)(p+2)-[\frac{(p-1)(p+2)}{(p+1)}]\}p\\ &= [(p-1)(p+2)-(p-1)]p=(p-1)p(p+1).\end{aligned}$$

由于 $2k=\frac{1}{2}(p-1)(p+2)<(p+2)(p+3)$, 由引理 5 可知

$$\begin{aligned}S((p+2)^{2k}) &= \{2k-[\frac{2k}{p+3}]\}(p+2)=\{\frac{1}{2}(p-1)(p+2)-[\frac{(p-1)(p+2)}{2(p+3)}]\}(p+2)\\ &= \{\frac{1}{2}(p-1)(p+2)-[\frac{(p-1)(p+3)-(p-1)}{2(p+3)}]\}(p+2)\\ &= [\frac{1}{2}(p-1)(p+2)-\frac{1}{2}(p-1)+1](p+2)=[\frac{1}{2}(p-1)(p+1)+1](p+2),\end{aligned}$$

作函数 $f(x)=(x-1)x(x+1)-[\frac{1}{2}(x^2-1)+1](x+2)$, 则

$$f'\left(x\right)=3x^2-1-(\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2})=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{3}{2}.$$

当 $x\geqslant 5$ 时, $f'\left(x\right)>f'\left(5\right)=26>0$, 因此 $f\left(x\right)$ 在 $[5,+\infty]$ 上严格单调递增, 由 $f\left(5\right)=29>0$, 则 $f\left(x\right)>0$ 在 $[5,+\infty]$ 上恒成立, 故此时 $\left(x-1\right)x\left(x+1\right)>\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)+1\right]\left(x+2\right)$. 所以当 $p\geqslant 5$ 时, $S\left(p^{4k}\right)>S\left(\left(p+2\right)^{2k}\right)$, 即有

$$S\left(n^{2k}\right)=S\left(p^{4k}\right)=\left(p-1\right)p\left(p+1\right).$$

当 $n=p^2\left(p+2\right)$ 时, $\phi\left(n\right)=\phi\left(p^2\left(p+2\right)\right)=\left(p-1\right)p\left(p+1\right)$. 故可知 $n=p^2\left(p+2\right)$ 是方程 $S\left(n^{2k}\right)=\phi\left(n\right)$ 的解.

当 $n=2p^2\left(p+2\right)$ 时,

$$\begin{aligned}S(n^{2k}) &= S((2p^2(p+2))^{2k})=\max\{S(2^{2k}),S(p^{4k}),S((p+2)^{2k})\}\\ &= S(p^{4k})=(p-1)p(p+1),\\ \phi(n) &= \phi(2p^2(p+2))=(2-1)p(p-1)(p+1)=(p-1)p(p+1).\end{aligned}$$

所以 $n=2p^2\left(p+2\right)$ 也是方程 $S\left(n^{2k}\right)=\phi\left(n\right)$ 的解.

同理可证 $n=p\left(p+2\right)^2$ 和 $n=2p\left(p+2\right)^2$ 都不是方程 $S\left(n^{2k}\right)=\phi\left(n\right)$ 的解.

定理 3 的证明 当 $n=p\left(p+2\right)^2$ 时,

$$S(n^{2k})=S((p(p+2)^2)^{2k})=\max\{S(p^{2k}),S((p+2)^{4k})\}.$$

由于 $2k=\frac{1}{2}\left(p-1\right)\left(p+1\right)<p\left(p+1\right)$, 根据引理 5, 可知

$$\begin{aligned} S(p^{2k}) &= (2k-[\frac{2k}{p+1}])p=\{\frac{1}{2}(p-1)(p+1)-[\frac{(p-1)(p+1)}{2(p+1)}]\}p \\ &= [\frac{1}{2}(p-1)(p+1)-\frac{1}{2}(p-1)]p=\frac{1}{2}(p-1)p^2=\frac{1}{2}(p^3-p^2). \end{aligned}$$

由于 $4k=\left(p-1\right)\left(p+1\right)<\left(p+2\right)\left(p+3\right)$, 根据引理 5, 可知

$$\begin{aligned} S\left(\left(p+2\right)^{4k}\right) &= \left\{4k-\left[\frac{4k}{p+3}\right]\right\}\left(p+2\right) \\ &= \left\{\left(p-1\right)\left(p+1\right)-\left[\frac{\left(p-1\right)\left(p+1\right)}{p+3}\right]\right\}\left(p+2\right) \\ &= \left\{\left(p-1\right)\left(p+1\right)-\left[\frac{\left(p-1\right)\left(p+3\right)-2\left(p+3\right)+8}{p+3}\right]\right\}\left(p+2\right) \\ &= \begin{cases} \left[\left(p-1\right)\left(p+1\right)-\left(p-2\right)\right]\left(p+2\right), p=5 \\ \left[\left(p-1\right)\left(p+1\right)-\left(p-3\right)\right]\left(p+2\right), p>5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(p^2-p+1\right)\left(p+2\right), p=5, \\ \left(p^2-p+2\right)\left(p+2\right), p>5. \end{cases} \end{aligned}$$

当 $p=5$ 时, 计算可得 $S\left(\left(p+2\right)^{4k}\right)-S\left(p^{2k}\right)>0$.

下面证明当 $p>5$ 时, $\left(p^2-p+2\right)\left(p+2\right)-\frac{1}{2}\left(p^3-p^2\right)>0$. 作函数

$$f\left(x\right)=\left(x^3+x^2+4\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-x^2\right),$$

则

$$f'\left(x\right)=3x^2+2x-\frac{1}{2}\left(3x^2-2x\right)=\frac{3}{2}x^2+3x.$$

当 $x\geqslant 5$ 时, $f'\left(x\right)>f'\left(5\right)>0$, 因此 $f\left(x\right)$ 在上严格单调递增, 由 $f\left(5\right)=104>0$, 则 $f\left(x\right)>0$ 恒成立, 故可以知道 $p>5$ 时, $\left(p^2-p+2\right)\left(p+2\right)-\frac{1}{2}\left(p^3-p^2\right)>0$. 因而有 $S((p+2)^{4k})-S(p^{2k})>0$, 即 $S((p+2)^{4k})>S(p^{2k})$, 所以

$$S(n^{2k})=\max\{S(p^{2k}),S((p+2)^{4k})\}=S((p+2)^{4k})=[(p-1)p+1](p+2).$$

当 $n=p\left(p+2\right)^2$ 时, $\phi\left(n\right)=\phi\left(p\left(p+2\right)^2\right)=\left(p-1\right)\left(p+2\right)\left(p+1\right)$.

此时 $S\left(n^{2k}\right)\neq\phi\left(n\right)$. 即 $n=p\left(p+2\right)^2$ 不是方程 $S\left(n^{2k}\right)=\phi\left(n\right)$ 的解. 当 $n=2p\left(p+2\right)^2$ 时,

$$\begin{aligned} S(n^{2k}) &= S((2p(p+2)^2)^{2k}) \\ &= \max\{S(2)^{2k},S(p^{2k}),S((p+2)^{4k})\} \\ &= S((p+2)^{4k})=[(p-1)p+1](p+2), \\ \phi(n) &= \phi(2p(p+2)^2)=(2-1)(p-1)(p+2)(p+2-1)=(p-1)(p+2)(p+1). \end{aligned}$$

此时 $S\left(n^{2k}\right) \neq \phi\left(n\right)$, 即 $n = 2p\left(p+2\right)^2$ 也不是方程 $S\left(n^{2k}\right) = \phi\left(n\right)$ 的解.

同理可证 $n = p^2\left(p+2\right)$ 和 $n = 2p^2\left(p+2\right)$ 都不是方程 $S\left(n^{2k}\right) = \phi\left(n\right)$ 的解.

定理 4 的证明 若 k 为任意的正整数, 当 $k=1$, $n = 2^{k+2} \times 3$ 时,

$$\begin{aligned} &S\left(n^{2k}\right) = S\left(\left(2^3 \times 3\right)^2\right) = S\left(2^6 \times 3^2\right) = \max\left\{S\left(2^6\right), S\left(3^2\right)\right\} = 8, \\ &\phi\left(n\right) = \phi\left(2^3 \times 3\right) = 2^2\left(2-1\right)\left(3-1\right) = 8, \end{aligned}$$

所以当 $k=1$ 时, $n = 2^{k+2} \times 3$ 是方程 $S\left(n^{2k}\right) = \phi\left(n\right)$ 的解.

同理可知 $k = 2, 3$ 时, $n = 2^{k+2} \times 3$ 却不是方程 $S\left(n^{2k}\right) = \phi\left(n\right)$ 的解. 而当 $k \geqslant 4$ 时, $n = 2^{k+2} \times 3$,

$$S\left(n^{2k}\right) = S\left(\left(2^{k+2} \times 3\right)^{2k}\right) = S\left(2^{2k(k+2)} \times 3^{2k}\right) = \max\left\{S\left(2^{2k(k+2)}\right), S\left(3^{2k}\right)\right\} = S\left(2^{2k(k+2)}\right).$$

由引理 4 知

$$\left(2-1\right)2k\left(k+2\right)+1 \leqslant S\left(2^{2k(k+2)}\right) \leqslant \left(2-1\right)\left[2k\left(k+2\right)+1+\log_2 2k\left(k+2\right)\right]+1,$$

可得

$$\begin{aligned} &S\left(2^{2k(k+2)}\right) \leqslant 2k\left(k+2\right)+\log_2 2k\left(k+2\right)+2, \\ &\phi\left(n\right) = \phi\left(2^{k+2} \times 3\right) = 2^{k+2}, \end{aligned}$$

所以

$$\phi\left(n\right) - S\left(2^{2k(k+2)}\right) \geqslant 2^{k+2} - \left(2k\left(k+2\right)+\log_2 2k\left(k+2\right)+2\right).$$

作函数

$$f\left(k\right) = 2^{k+2} - \left(2k\left(k+2\right)+\log_2 2k\left(k+2\right)+2\right),$$

则

$$f'\left(k\right) = 2^{k+2}\ln 2 - \left(4k+4+\frac{2k+2}{k\left(k+2\right)\ln 2}\right).$$

当 $k \geqslant 4$ 时, $0 < \frac{2k+2}{k(k+2)\ln 2} < 1$, 所以 $f'\left(k\right) = 2^{k+2}\ln 2 - 4k - 4 > 0$, $f\left(k\right)$ 为单调递增函数, 又 $f\left(4\right) = 14 - 4\log_2 3 > 0$, 所以当 $k \geqslant 4$ 时, 恒有 $f\left(k\right) > 0$. 故此时有 $\phi\left(n\right) - S\left(n^{2k}\right) > 0$.

综合以上可得, 当 $k \geqslant 2$ 时, $n = 2^{k+2} \times 3$ 不是方程 $S\left(n^{2k}\right) = \phi\left(n\right)$ 的解.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer Verlag, 1976.

[3] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 (第 2 版)[M]. 北京：北京大学出版社, 2003.

[4] 张文鹏, 李海龙. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[5] Gupta H. On a problem of Erdŏs[J]. Amer. Math. Monthly, 1950, 57: 326–329.

[6] Erdŏs P. On a conjecture of Klee[J]. Amer. Math. Monthly, 1951, 58: 98–101.

[7] Woolridge K. Values taken many times by Euler's ϕ-function[J]. Proc. Amer. Math. Sco., 1969, 76: 229–234.

[8] Erdŏs P. On the normal number of prime factors of $P-1$ and some related problems concerning Euler's function[J]. Quart. J. Math. Oxford Ser., 1935, 16: 205–213.

[9] Pomerance. Popular values of Euler S function[J]. Mathematika, 1980, 27: 84–89.

[10] Ma Jinping. An equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna., 2005, 1(2): 89–90.

[11] Yi Yuan. An equation involving the Euler function and Smarandache function[J]. Scientia Magna., 2005, 1(2): 172–175.

[12] Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37–42.

[13] 李梵蓓. 一个与 Smarandache 函数有关的函数方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报, 2008, 38(6): 892–893.

[14] 陈姣. 一类包含 Smarandache 和函数的 Ditichlet 级数 [J]. 西南师范大学学报, 2011, 36(1): 39–43.

[15] 黄寿生, 陈锡庚. 关于数论函数方程 $\phi(n)=S\left(n^5\right)$[J]. 华南师范大学学报, 2007, (4): 41–43.

[16] 吴欣. 关于含伪 Smarandache 函数及其对偶函数的方程的可解性 [J]. 西南大学学报, 2011, 33(8): 102–105.

[17] 陈斌. 一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程 [J]. 西南大学学报, 2012, 34(2): 1–4.

[18] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49 (5): 1009–1012.

[19] 赵教练. 关于 Smarandache 方程的可解性 [J]. 华东师范大学学报, 2011, (3): 68–72.

[20] Sandor J. On cetain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 41–51.

A SOLVABILITY PROBLEM OF THE EQUATION INVOLVING SMARANDACHE FUNCTION

CHEN Bin

(*1.Department of Mathematics, Weinan Normal University, Weinan 714000, China*)

Abstract: The paper studies the function equation involving the Euler and Smarandache function. By using the elementary number theory methods and the analysis methods, we obtain the general forms of solutions about the equation and some interesting theories. Therefore, the existence results about the equation could be improved and applied to a wider scope.

Keywords: Smarandache function; Euler function; equation; solvability.

2010 MR Subject Classification: 11D72