DOI: 10.3969/J. ISSN. 1004 - 602X. 2012. 02. 003

一类包含 Smarandache 函数方程 $\varphi(n) = S(n^{10})$

赵院娥[1]，马彩艳[1]，祁　兰[2]

(1. 延安大学 数学与计算机科学系，陕西 延安 716000; 2. 榆林学院，陕西 榆林 719000)

摘　要: 利用初等数论、组合分析以及 C + + 程序对方程 $\varphi(n) = S(n^{10})$ 进行讨论，证明了该方程仅有正整数解 $n = 1$，这里对于任意正整数 n，$\varphi(n)$ 和 $S(n)$ 分别表示关于 n 的 Euler 函数和 Smarandache 函数。

关键词: Smarandache 函数; Euler 函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004-602X(2012)02-0003-05

1　引言及定义

美籍罗马尼亚数论专家 Florentin Smarandache 教授对数论的发展做出了许多贡献，其中一项就是他源源不断的提出一系列出色的问题. 在国际数学界的一些杂志、期刊甚至百科全书中把他所提出的一系列问题命名为 Smarandache 函数、序列、悖论等. 在 1993 年，他所著《Only Problems, Not Solutions》一书中提出了 105 个关于特殊序列、算数函数等未解决的数学问题及猜想，随着这些问题的提出，国内许多专家和学者对此进行了深入的研究，并获得了不少具有重要理论价值的研究成果。现如今对于 Smarandache 函数的研究也是数论研究者最为关注的课题之一，很多学者对函数方程 $\varphi(n) = S(n^k)$ 解的情况做出了显著的成绩。

定义 1[1]　Smarandache 函数: 使得 $n \mid m!$ 最小整正数 m，记作: $S(n)$ 即

$$S(n) = \min\{m: \ m \in N, n \mid m!\}.$$

定义 2[2]　Euler 函数: 不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数，记作: $\varphi(n)$.

一个关于 Euler 和 Smarandache 函数的方程

$$\varphi(n) = S(n^k) \qquad (*)$$

这里 k 为非负整数。

马金平[1] 研究了 $k = 1$ 时的解的问题，证明了 $k = 1$ 当时，方程(*)仅有解 1。

易媛[3] 得到了 $k = 2, 3, 4$ 时的解，另外有许多学者[4-7] 研究了方程(*)的解。

本文解决了 $k = 10$ 时的求解问题及解的个数问题，并应用 C + + 程序(见附录 1)，使整个计算过程得已简化。

2　几个引理

引理 1[2]　对于任意互素的正整数 m 和 n，则有 Euler 函数为积性

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

引理 2[2]　如果 $n = p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \cdots, p_k^{r_k}$ 是正整数 n 的标准分解式，则有

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i - 1}(p_i - 1).$$

引理 3　当 $n > 2$ 时，$\varphi(n)$ 必为偶数。

证明　①如果 n 有奇素因数 p，则 $p - 1$ 是偶数。根据引理 2 可知: $(p - 1) \mid \varphi(n)$，所以 $\varphi(n)$ 也是偶数。

②如果 n 没有奇素因数，则因 $n > 2$，故有 $n = 2^r$，其中 r 是大于 1 的正整数。此时，根据引理 2 可知: $\varphi(n) = 2^{r-1}$ 也是偶数。

引理 4[1]　如果 $n = p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \cdots, p_k^{r_k}$ 是正整数 n 的标准分解式，则

收稿日期: 2012-04-26

基金项目: 陕西省教育厅科研计划项目(11JK0489)

作者简介: 赵院娥(1972—)，女，陕西延安人，延安大学副教授。

$S(n)=\max\{S(p_1^{r_1}),S(p_2^{r_2}),\cdots,S(p_k^{r_k})\}$.

引理 5[3] 对于素数 p 和正整数 k,有 $S(p^k)\leqslant kp$,特别地,当 $k<p$ 时,有 $S(p^k)=kp$.

3 定理及其证明

定理 当 $k=10$ 时,方程仅有解 $n=1$.

证明 当 $k=10$ 时,方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ 可写成

$$\varphi(n)=S(n^{10}) \tag{1}$$

接下来我们对这一方程求解:

a) 当 $n=1$ 时,显然是方程的解。

b) 当 $n>1$ 时,根据引理 4 可知。

$$S(n^{10})=\max\{S(p_1^{10r_1}),S(p_2^{10r_2}),\cdots,S(p_k^{10r_k})\}=S(p^{10r}) \tag{2}$$

由引理 1,

$$\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi(\frac{n}{p^r})=p^{r-1}(p-1)\varphi(\frac{n}{p^r}) \tag{3}$$

联立式(1)、(2)、(3)可得

$$p^{r-1}(p-1)\varphi(\frac{n}{p^r})=S(p^{10r}) \tag{4}$$

那么,有

(i) 当 $r=1$ 时,方程式(4)可变为

$$(p-1)\varphi(\frac{n}{p})=S(p^{10}).$$

若 $p=2$ 时,

$$\varphi(\frac{n}{2})=S(2^{10})=12 \tag{5}$$

由附表 1 可知 $\frac{n}{2}=13,21,26,28,36,42$. 即 $\frac{n}{2}$ 含有奇素因子 q,且可得

$$S(q^{10})=\begin{cases}24 & q=3\\45 & q=5\\63 & q=7\\10q & q>7\end{cases},$$

所以(5)式和(2)式矛盾,故 $r=1,p=2$ 时方程(1)无解。

若 $p=3$ 时,$2\varphi(\frac{n}{3})=S(3^{10})=24$,

即

$$\varphi(\frac{n}{3})=12 \tag{6}$$

由附表 1 可知 $\frac{n}{3}=13,21,26,28,36,42$. 即 $\frac{n}{3}$ 含奇素因子 q,且可得

$$S(q^{10})=\begin{cases}24 & q=3\\45 & q=5\\63 & q=7\\10q & q>7\end{cases}$$

所以(2)和(6)式矛盾,故 $r=1,p=3$ 方程(1)无解。

若 $p=5$ 时,$4\varphi(\frac{n}{5})=S(5^{10})=45$,可知 $\varphi(\frac{n}{5})=\frac{45}{4}$,与引理 3 矛盾,故 $r=1,p=5$ 方程(1)无解。

若时 $p=7$,$6\varphi(\frac{n}{7})=S(7^{10})=63$,即 $\varphi(\frac{n}{7})=\frac{63}{6}$,与引理 3 矛盾,故 $r=1,p=7$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant 11$ 时,由引理 5 可知 $S(p^{10})=10p$,$\varphi(n)=(p-1)\varphi(\frac{n}{p})$,注意到 $(p-1)\nmid 10p$,因此 $r=1,p\geqslant 11$ 时方程(1)无解。

(ii) 若 $r=2$ 时,方程式(4)可变为

$$p(p-1)\varphi(\frac{n}{p^2})=S(p^{20}).$$

若 $p=2$ 时,$2\varphi(\frac{n}{2^2})=S(2^{20})=24$,

即

$$\varphi(\frac{n}{2^2})=12 \tag{7}$$

由附表 1 可知 $\frac{n}{4}=13,21,26,28,36,42$. 即 $\frac{n}{4}$ 含奇素因子 q,且可得

$$S(q^{20})=\begin{cases}45 & q=3\\85 & q=5\\126 & q=7\\>126 & q>7\end{cases},$$

所以(2)式和(7)式矛盾,故 $r=2,p=2$ 时方程(1)无解。

若 $p=3$ 时,$6\varphi(\frac{n}{3^2})=S(3^{20})=45$,即 $\varphi(\frac{n}{3^2})=\frac{45}{6}$ 与引理 3 矛盾,故 $r=3,p=3$ 方程(1)无解。

若 $p=5$ 时,$20\varphi(\frac{n}{5^2})=S(5^{20})=85$,即 $\varphi(\frac{n}{5^2})=\frac{85}{20}$ 与引理 3 矛盾,故 $r=3,p=5$ 方程(1)无解。

若 $p=7$ 时,$42\varphi(\frac{n}{7^2})=S(7^{20})=126$,即 $\varphi(\frac{n}{7^2})=3$ 与引理 3 矛盾,故 $r=3,p=7$ 方程(1)无解。

若 $p=11$ 时,$110\varphi(\frac{n}{11^2})=S(11^{20})=209$,即 $\varphi(\frac{n}{11^2})=\frac{209}{110}$ 与引理 3 矛盾,故 $r=3,p=11$ 方程(1)无解。

若 $p=13$ 时，$13\times12\varphi(\frac{n}{13^2})=S(13^{20})=19\times13$，即 $\varphi(\frac{n}{13^2})=\frac{19}{12}$与引理3矛盾，故 $r=3$，$p=13$ 方程(1)无解。

若 $p=17$ 时，$19\times16\varphi(\frac{n}{17^2})=S(17^{20})=17\times19$，即 $\varphi(\frac{n}{17^2})=\frac{19}{16}$与引理3矛盾，故 $r=3$，$p=17$ 方程(1)无解。

若 $p=19$ 时，$19\times18\varphi(\frac{n}{19^2})=S(19^{20})=19\times19$，即 $\varphi(\frac{n}{19^2})=\frac{19}{18}$与引理3矛盾，故 $r=3$，$p=19$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant23$ 时，由引理5可知 $S(p^{20})=20p\varphi(n)=p(p-1)\varphi(\frac{n}{p^2})$，注意到 $p-1>20$，则 $\varphi(n)=p(p-1)\varphi(\frac{n}{p^2})>20p=S(p^{20})$，故 $r=3$，$p\geqslant19$ 方程(1)无解。

(iii) $r=3$ 时，方程式(4)可变为

$$p^2(p-1)\varphi(\frac{n}{p^3})=S(p^{30}).$$

若 $p=2$ 时，$4\varphi(\frac{n}{2^3})=S(2^{30})=32$，

即 $\varphi(\frac{n}{2^3})=8$　　(8)

由附表1可知$\frac{n}{8}=15,16,20,24,30$. 即$\frac{n}{8}$含奇素因子 q，且可得

$$S(q^{30})=\begin{cases}60 & q=3\\125 & q=5\\189 & q=7\\>189 & q>7\end{cases},$$

所以(8)式和(2)式矛盾，故 $r=3$，$p=2$ 时方程(1)无解。

若 $p=3$ 时，$18\varphi(\frac{n}{3^3})=S(3^{30})=66$，即 $\varphi(\frac{n}{3^3})=\frac{66}{18}$与引理3矛盾，故 $r=3$，$p=3$ 方程(1)无解。

若 $p=5$ 时，$100\varphi(\frac{n}{5^3})=S(5^{30})=125$，即 $\varphi(\frac{n}{5^3})=\frac{125}{100}$与引理3矛盾，故 $r=3$，$p=5$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant7$ 时，由引理5可知 $S(p^{30})\leqslant30p$，$\varphi(n)=p^2(p-1)\varphi(\frac{n}{p^3})$ 而 $p^2(p-1)\varphi(\frac{n}{p^3})\geqslant30p$，故 $r=3$，$p\geqslant7$ 方程(1)无解。

(iv) $r=4$ 时，方程式(4)可变为

$$p^3(p-1)\varphi(\frac{n}{p^4})=S(p^{40}).$$

若 $p=2$ 时，$8\varphi(\frac{n}{2^4})=S(2^{40})=44$，即 $\varphi(\frac{n}{2^4})=\frac{44}{8}$与引理3矛盾，故 $r=4$，$p=2$ 方程(1)无解。

若 $p=3$ 时，$54\varphi(\frac{n}{3^4})=S(3^{40})=84$，即 $\varphi(\frac{n}{3^4})=\frac{84}{54}$与引理3矛盾，故 $r=4$，$p=3$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant5$ 时，由引理5可知 $S(p^{40})\leqslant40p$，$\varphi(n)=p^3(p-1)\varphi(\frac{n}{p^4})$，而 $p^3(p-1)\varphi(\frac{n}{p^4})\geqslant40p$，故 $r=4$，$p\geqslant5$ 方程(1)无解。

(v) $r=5$ 时，方程式(4)可变为

$$p^4(p-1)\varphi(\frac{n}{p^5})=S(p^{50}).$$

若 $p=2$ 时，$16\varphi(\frac{n}{2^5})=S(2^{50})=56$，即 $\varphi(\frac{n}{2^5})=\frac{56}{16}$与引理3矛盾，故 $r=5$，$p=2$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant3$ 时，由引理5可知 $S(p^{50})\leqslant50p$，$\varphi(n)=p^4(p-1)\varphi(\frac{n}{p^5})$，而 $p^4(p-1)\varphi(\frac{n}{p^5})\geqslant50p$，故 $r=5$，$p\geqslant3$ 方程(1)无解。

(vi) $r=6$ 时，方程式(4)可变为

$$p^5(p-1)\varphi(\frac{n}{p^6})=S(p^{60}).$$

若 $p=2$ 时，$32\varphi(\frac{n}{2^6})=S(2^{60})=64$，即 $\varphi(\frac{n}{2^6})=\frac{64}{32}$与引理3矛盾，故 $r=6$，$p=2$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant3$ 时，由引理5可知 $S(p^{60})\leqslant60p$，$\varphi(n)=p^5(p-1)\varphi(\frac{n}{p^6})$，而 $p^5(p-1)\varphi(\frac{n}{p^6})\geqslant60p$，故 $r=6$，$p\geqslant3$ 方程(1)无解。

(vii) 当 $r=7$ 时，方程式(4)可变为

$$p^6(p-1)\varphi(\frac{n}{p^7})=S(p^{70}).$$

若 $p=2$ 时，$64\varphi(\frac{n}{2^7})=S(2^{70})=72$，即 $\varphi(\frac{n}{2^7})=$

$\frac{72}{64}$与引理 3 矛盾，故 $r=7$，$p=2$ 方程(1)无解。

若 $p\geqslant3$ 时，由引理 5 可知 $S(p^{70})\leqslant70p$，$\varphi(n)=p^6(p-1)\varphi(\frac{n}{p^7})$，而 $p^6(p-1)\varphi(\frac{n}{p^7})\geqslant70p$，故 $r=7$，$p\geqslant3$ 方程(1)无解。

(*viii*) 若 $r\geqslant8$ 时，由引理 5 可知 $S(p^{80})\leqslant80p$，$\varphi(n)=p^7(p-1)\varphi(\frac{n}{p^8})$，而 $p^7(p-1)\varphi(\frac{n}{p^8})\geqslant80p$，故方程(1)无解。

综上，定理得证。

参考文献:

[1] FARRISM, MITCHELLP. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 37 - 42.

[2] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007, 31 - 32.

[3] YIY. An equation in volving the Euler function and Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 172 - 175.

[4] 黄寿生，陈锡庚. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^5)$ [J]. 华南师范大学学报, 2007(4): 41 - 43.

[5] 郑涛. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n-t)$ [J]. 中国科教创新导刊, 2009(2): 154 - 154.

[6] 曹楠，高丽. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^7)$ [J]. 西南民族大学学报; 自然科学版, 2009, 35(5): 992 - 994.

[7] 陈斌. 一类包含 Smarandache 和 Euler 函数的方程 [J]. 西南大学学报, 2012(2): 70 - 73.

[责任编辑　贺小林]

附录 1: 计算的 C++ 程序:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
main()
{
    longinti,j;
    longintnum1[34];
    longintn,n1,n2;
    while(scanf("%ld",&n)!=EOF&&n)
    {
        n1=n;j=0;
        n2=sqrt(n);
        for(i=2;i<=n2;i++)
        {
            if(!(n%i))
            {
                n=n/i;num1[j++]=i;
                while(!(n%i))n=n/i;
            }
        }
        if(n>n2)
        {
            num1[j]=n;
            for(i=0;i<=j;i++)
            n1=n1-n1/num1[i];
        }
        if(n==1)
            for(i=0;i<j;i++)
            n1=n1-n1/num1[i];
        printf("%ld\n",n1);
        }
        return0;
}
```

附表 1:

n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$
1	1	26	12	51	32	76	36	101	100
2	1	27	18	52	24	77	60	102	32
3	2	28	12	53	52	78	24	103	102
4	2	29	28	54	18	79	78	104	48
5	4	30	8	55	40	80	32	105	48
6	2	31	30	56	24	81	54	106	52
7	6	32	16	57	36	82	40	107	106
8	4	33	20	58	28	83	82	108	38
9	6	34	16	59	58	84	24	109	108
10	4	35	24	60	16	85	64	110	40

n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$	n	$\varphi(n)$
11	10	36	12	61	60	86	42	111	72
12	4	37	36	62	30	87	56	112	48
13	12	38	18	63	36	88	40	113	112
14	6	39	24	64	32	89	88	114	36
15	8	40	16	65	48	90	24	115	88
16	8	41	41	66	20	91	72	116	56
17	16	42	12	67	66	92	44	117	72
18	6	43	42	68	32	93	60	118	58
19	18	44	20	69	44	94	46	119	96
20	8	45	24	70	24	95	72	120	32
21	12	46	22	71	70	96	32	121	110
22	10	47	46	72	24	97	96	122	60
23	22	48	16	73	72	98	42	123	80
24	8	49	42	74	36	99	60	124	60
25	20	50	20	75	40	100	40	125	100

An Equation Involving the Smarandache Function $\varphi(n)=S(n^{10})$

ZHAO Yuan－e[1]，MA Cai－yan[1]，QI LAN[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science，Yan an University，Yan an 716000;
2. Yulin College，Yulin 719000，China)

Abstract: In this paper，we use the elementary number theory methods the combination analysis and C++ program to get the solutions of the equation $\varphi(n)=S(n^{10})$，and a result is proved that the equation has only positive integer solutions $n=1$. Here for any positive integer n，let $\varphi(n)$ and $S(n)$ denote the Euler function and the Smarandache function of the integer.

Key words: Smarandache function; Euler function; equation; positive integer solutions

(上接第2页)

[3] 逄明贤. 广义对角占优阵的判定及其应用[J]. 数学年刊，1985(3):323－330.

[4] 黄廷祝. 非奇异 H－矩阵的简捷判据[J]. 计算数学，1993(3):318－328.

[5] 胡家赣. 线性方程组的迭代解法[M]. 北京:科学出版社，1991.

[责任编辑　贺小林]

Practical Sufficient Conditions for Nonsingular H－ matrices

YANG Ya－fang

(College of Mathematics and Statistics，Tianshui Normal University，Tianshui 741001，China)

Abstract: Some criteria practical sufficient conditions for nonsingular H－matrices will be given by comparing the elements of the matrix，and a numerical example illustrates the effectiveness of the result.

Key words: nonsingular H－matrix; dominant matrix; irreducibility dominant matrix; nonzero elements chain