DOI:10.15983/j.cnki.jsnu.2010.05.003
第 38 卷 第 5 期 陕西师范大学学报(自然科学版) Vol.38 No.5
2010 年 9 月 Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition) Sep. 2010

文章编号:1672-4291(2010)05-0014-04

一类包含 Smarandache 和函数的 Ditichlet 级数

王建平
(长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

摘 要:研究了一类包含函数 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题.用高斯取整函数的性质及初等方法,对某些特殊的整数 $k>1$,给出了该级数的几个具体的计算公式.这些结果在离散和连续之间架起了一个桥梁,将一类离散问题和解析函数紧密联系起来.

关键词:Smarandache 和函数;Dirichlet 级数;初等方法;计算公式
中图分类号:O156.4 文献标志码:A

One kind Dirichlet series involving the Smarandache Summands function

WANG Jian-ping
(College of Science, Chang′an University, Xi′an 710064, Shaanxi, China)

Abstract: The calculating problem of one kind Dirichlet series involving the function $S(n,k)$ is studied. By using the properties of Gauss floor function and the elementary method, some exactly calculating formulas for the series with some special positive integer k are given. The series becomes a bridge between the discrete and the continuous, and gives a relation between discrete problems and analytic functions.

Key words: Smarandache summand function; Dirichlet series; elementary method; calculating formula
MR subject classification: 11B83

对任意正整数 n 及正整数 $k>1$,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$[1];而 Smarandache 和函数 $S(n,k)$ 定义为

$$S(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}(n-ik),$$

例如, $S(9,2)=9+(9-2)+(9-4)+(9-6)+(9-8)+(9-10)+(9-12)+(9-14)+(9-16)+(9-18)=0$, $S(9,4)=9+(9-4)+(9-8)+(9-12)+(9-16)=5$, $S(11,5)=11+(11-5)+(11-10)+(11-15)+(11-20)=5$, $S(13,6)=13+(13-6)+(13-12)+(13-18)+(13-24)=5$, $\cdots$.

这个函数是有意义的,可以反映出正整数 n 在 k 的倍数数列中的分布性质.有关 Smarandache 的其他问题可参阅文献[2-7].文献[5]研究了均方值 $(SL(n)-\Omega(n))^2$ 的渐近性质,给出了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-\Omega(n))^2=\frac{4}{5}\zeta\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta-函数, c_i 为可计算的常数. $\Omega(n)$ 为可加函数,定义为: $\Omega(n)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j$,如果 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.文献[6]研究了有关 Smarandache 函数性质,同时提出了一系列未解决的问题.

本文利用初等方法以及取整函数的性质研究函数 $S(n,k)$ 的算术性质以及一类包含 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题,并对某些特殊的正整数 $k>1$,给出该级数几个具体的计算公式.文中所用到的初等数论知识参阅文献[8].

命题 1 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>2$,则有恒等

收稿日期:2010-03-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472068).
作者简介:王建平,女,讲师,主要从事基础数学研究.E-mail:wangjianping7011@163.com.

式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,4)}{n^s}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{s}}\right)\zeta(s),$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta-函数.

命题 2　对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,8)}{n^s}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{2^{s}}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时, 注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,8)}{n^4}=\frac{\pi^2}{32}+\frac{5\pi^4}{604}.$$

命题 3　对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,16)}{n^s}=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s}}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,14)}{n^4}=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi^4}{96}.$$

命题 4　对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>3$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^s}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s}}\right)\zeta(s).$$

特别当 $s=4$ 时有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^4}=\frac{4\pi^2}{81}+\frac{16\pi^4}{2\,187}.$$

命题 5　设 $p>2$ 为素数, 对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>p$, 则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^{p-1},p)}{n^s}=\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)\zeta(s).$$

命题的证明　为了完成命题的证明, 需要高斯函数[x] 的一些基本性质, 比如: 对任意实数 x 有 $[x]\leqslant x<1+[x]$; $0\leqslant x-[x]=\{x\}<1$. 另外, 还需要一些关于著名的 Riemannzeta-函数的一些知识, 例如: $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时, 该级数收敛; 当 $s=1$时该级数发散; $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$; $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$. 这些结论可以在文献[8] 中找到.

利用初等方法以及高斯取整函数的性质给出命题的证明. 首先用高斯取整函数将函数 $S(n,k)$ 进行简化, 表示成更简单的形式. 注意到 $|n-ki|\leqslant n$ 当且仅当 $-n\leqslant n-ki\leqslant n$ 或者 $0\leqslant i\leqslant\left[\frac{2n}{k}\right]$, 其中 $[x]$ 为高斯取整函数, 即就是[x] 表示不大于 x 的最大整数. 于是函数 $S(n,k)$ 可表示为

$$\begin{aligned}S(n,k)&=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}(n-ik)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}(n-ki)=\\&n+n\circ\left[\frac{2n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)=\\&\frac{2n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k}-\frac{4n}{k}\left\{\frac{2n}{k}\right\}+\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2+\frac{2n}{k}-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)=\\&n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)=\\&n\left\{\frac{2n}{k}\right\}+\frac{k}{8}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}\qquad(1)$$

其中$\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分, $0\leqslant\{x\}<1$.

因为$\left\{\frac{2n}{k}\right\}=\frac{2n}{k}$, 如果 $k>2n$. 所以当 $k>2n$ 时由(1) 式有恒等式

$$S(n,k)=\frac{2n^2}{k}-\frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2}-\frac{2n}{k}\right)=n.$$

又由于 $-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\geqslant 0$, 所以注意到 $0\leqslant\left\{\frac{2n}{k}\right\}\leqslant\frac{k-1}{k}$, 根据(1) 式可以推出当 $k<2n$ 时有估计式

$$0\leqslant S(n,k)\leqslant n-\frac{n}{k}+\frac{k}{8}.\qquad(2)$$

由(2) 式不难推出当 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时, Dirichlet 级数 $F_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,k)}{n^s}$ 绝对收敛, 特别对 $k=4$, 注意到当 $k\mid 2n$ 时有 $S(n,k)=0$; 当 n 为奇数时有

$$S(n,4)=\frac{n+1}{2};$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\frac{1}{2^s}\zeta(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}$$

或者 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$,
所以有恒等式

$$F_4(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n,4)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n,4)}{2^sn^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n-1,4)}{(2n-1)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(2n-1,4)}{(2n-1)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^s}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s). \tag{3}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta-函数. 于是证明了命题1.

现在证明命题3. 类似地可以推出命题2. 当 $\mathrm{Re}(s)>3$ 时, 由(1)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,16)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\left\{\frac{n^2}{8}\right\}-\frac{16}{2}\left(\left\{\frac{n^2}{8}\right\}^2-\left\{\frac{n^2}{8}\right\}\right)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}}{2^{s-2}(2n-1)^{s-2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\left(\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}\right)}{2^s(2n-1)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}}{(2n-1)^{s-2}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\left(\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}^2-\left\{\frac{(2n-1)^2}{8}\right\}\right)}{(2n-1)^s}=$$

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-2}}+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^s}=\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s).$$

于是完成了命题3的证明.

当 $k=6$ 时, 注意到当3不整除 n 时, 有 $n^2\equiv 1 \bmod 3$, 所以 $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=\frac{1}{3}$. 当3整除 n 时有 $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=0$, 所以由(1)式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n^2,6)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\left\{\frac{n^2}{3}\right\}-\frac{6}{2}\left(\left\{\frac{n^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{n^2}{3}\right\}\right)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s-2}}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s-2}}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^s}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}-\frac{1}{3^{s-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{1}{3^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s-2}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s).$$

于是证明了命题4.

为证明命题5, 注意到对任意素数 $p\geqslant 3$ 以及正整数 n 且 $(n,p)=1$, 由著名的 Euler(或 Fermat)定理知 $n^{p-1}\equiv 1 \bmod p$. 于是有 $\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}=\frac{2}{p}$. 由公式(1)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S\left(n^{p-1},p\right)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-1}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}-\frac{p}{2}\left(\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}^2-\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}\right)}{n^s}=\frac{2}{p}\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{s-p+1}}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

由于 $\sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$, 由上式可以推出恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S\left(n^{p-1}, p\right)}{n^s} = \frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s).$$

于是完成了所有命题的证明.

本文研究了函数 $S(n,k)$ 的算术性质以及一类包含 $S(n,k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题, 并对某些特殊的正整数 $k>1$, 给出该级数的几个具体的计算公式. 这些结果在离散和连续之间架起了桥梁, 将 Smarandache 和函数这一离散问题和著名的 Riemann zeta-函数紧密联系起来.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 37-38.

[2] Ge Jian. Mean value of the F. Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[3] Balacenoiu I, Seleacu V. History of the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 192-201.

[4] 苏娟丽. 关于 Smarandache 函数的一个新的下界估计 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.

[5] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(1): 71-74.

[6] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2008, 38(2): 173-176.

[7] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[8] 张文鹏, 李海龙. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2008.

〔责任编辑　张惠民〕

(上接第 5 页)

5　结语

本文证明了在任意偏序集中 Birkhoff-Frink 的网的序收敛和 Erné-Gatzke 的滤子的强序收敛相互协调, Wolk 网的序收敛和 Erné-Gatzke 的滤子的序收敛相互协调. 如果偏序集是一个格, 则这两种序收敛导出的拓扑一致. 引入了序收敛格的定义, 证明了序收敛格导出的序拓扑是一个 Hausdorff 的正则空间, 序收敛格的有限积是序收敛格, 由全体序收敛的完备格构成的偏序集范畴的满子范畴是笛卡儿闭的. 文中的结论对研究偏序集上的其他内蕴拓扑有一定的意义.

参考文献:

[1] Birkhoff G. Lattice theory [M]. 4th ed. New York: American Mathematical Society, 1995: 287-410.

[2] Frink O. Topology in lattices [J]. Transactions of American Mathematical Society, 1942, 51(4): 569-582.

[3] Erné M. Topologies on products of partially ordered sets III [J]. Algebra Universalis, 1981, 13(1): 1-23.

[4] Erné M, Gatzke H. Convergence and continuity in partially ordered sets and semilattices [C] // Hoffmann R E, Hofmann K H. Continuous Lattices and their Applications. Lecture Notes on Pure and Applied Mathemaitcs 109. New York, 1982: 9-40.

[5] Wolk E S. On order-convergence [J]. Proceedings of American Mathematical Society, 1961, 12(3): 379-384.

[6] Kent D C. Convergence functions and their related topologies [J]. Fundamenta Mathematicae, 1964, 54(1): 125-133.

[7] Kelly J L. General topology [M]. New York: Van Nostrand, 1955: 62-83.

[8] Zhao Bin, Li Juan. O_2-convergence in posets [J]. Topology and its Applications, 2006, 153(15): 2971-2975.

[9] Zhao Bin, Zhao Dongsheng. Lim-inf convergence in partially ordered sets [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 309(2): 701-708.

[10] Zypen D V. Order convergence and compactness [J]. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 2004, 45(4): 297-300.

[11] Gingras A R. Convergence lattice [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1976, 6(1): 85-104.

[12] Adámek J, Herrlich H, Strecker G E. Abstract and concrete categories [M]. New York: Wiley, 1990: 437-450.

〔责任编辑　张惠民〕