DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2011.01.009

第 36 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 2 月
Vol. 36 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0039-05

一类包含 Smarandache 和函数的 Ditichlet 级数

陈 姣

西北大学 数学系,西安 710127

摘要:对任意正整数 n 及给定的正整数 $k>1$,利用高斯取整函数的性质及初等方法研究 Smarandache 和函数 $AS(n, k)$ 的算术性质以及一类包含 $AS(n, k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题. 并对某些特殊的正整数 $k>1$,给出了该级数的一个具体的计算公式.

关 键 词:Smarandache 和函数;Dirichlet 级数;初等方法;计算公式

中图分类号:O156.4 文献标志码:A

1 引言及结论

对任意正整数 n 及给定的正整数 $k>1$,M. Bencze 曾定义了 Smarandache 和函数 $AS(n, k)$ 如下:

$$AS(n, k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n \\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ik|$$

例如

$$AS(9, 2)=9+|9-2|+|9-4|+|9-6|+|9-8|+|9-10|+$$
$$|9-12|+|9-14|+|9-16|+|9-18|=50$$
$$AS(9, 4)=9+|9-4|+|9-8|+|9-12|+|9-16|=25$$
$$AS(11, 5)=11+|11-5|+|11-10|+|11-15|+|11-20|=31$$
$$AS(13, 6)=13+|13-6|+|13-12|+|13-18|+|13-24|=37$$

同时 M. Bencze 还建议人们研究函数 $AS(n, k)$ 的各种算术性质. 这个函数是有意义的,至少可以反映出正整数 n 在 k 的倍数数列中的绝对分布性质. 有关 Smarandache 函数的内容也可参阅文献[1].

本文的主要目的是利用初等方法以及取整函数的性质研究函数 $AS(n, k)$ 的算术性质以及一类包含 $AS(n, k)$ 的 Dirichlet 级数的计算问题. 并对某些特殊的正整数 $k>1$,给出该级数的一个具体的计算公式. 具体地说也就是证明下面几个结论:

命题 1 对任意复数 s,若 $\mathrm{Re}(s)>3$,则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n, 2)}{n^s}=2\zeta(s-2)+\frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s-1)$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数.

命题 2 对任意复数 s,若 $\mathrm{Re}(s)>5$,则有恒等式

收稿日期:2010-04-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472068).
作者简介:陈 姣(1986-),女,陕西西安人,硕士研究生,主要从事数论的研究.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2, 8)}{n^s}=\frac{1}{8}\zeta(s-4)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s-2)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

特别当 $s=6$ 时，注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$，$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$，我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2, 8)}{n^4}=\frac{\pi^2}{48}+\frac{49\pi^4}{5760}+\frac{7\pi^6}{43008}$$

命题3 对任意复数 s，若 $\mathrm{Re}(s)>5$，则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2, 4)}{n^s}=\frac{1}{4}\zeta(s-4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

特别当 $s=6$ 时，我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^2, 4)}{n^4}=\frac{\pi^2}{24}+\frac{17\pi^4}{2880}+\frac{\pi^6}{3840}$$

命题4 对任意复数 s，若 $\mathrm{Re}(s)>5$，则有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2, 6)}{n^s}=\frac{2}{3}\zeta(s-4)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)$$

特别当 $s=6$ 时，我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2, 6)}{n^4}=\frac{\pi^2}{9}+\frac{83\pi^4}{10935}+\frac{1456\pi^6}{2066751}$$

命题5 设 p 为大于2的素数，则对任意复数 s 且 $\mathrm{Re}(s)>p$，我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^{p-1}, p)}{n^s}=$$
$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-2p+2}}\right)\zeta(s-2p+2)+$$
$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$$

2 命题的证明

这节我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出命题的证明.

首先我们用高斯取整函数将函数 $AS(n, k)$ 进行简化，表示成更简单的形式. 注意到 $|n-ki|\leqslant n$ 当且仅当 $-n\leqslant n-ki\leqslant n$ 或者 $0\leqslant i\leqslant\left[\frac{2n}{k}\right]$ ($[x]$ 为高斯取整函数，即 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数). 于是函数 $AS(n, k)$ 可表示为:

$$\begin{aligned}AS(n, k)=&\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ik|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|=\\&\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}|n-ki|+\sum_{i=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|=\\&n+n\cdot\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)-n\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)+\\&\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)=\\&\frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分，$0\leqslant\{x\}<1$.

如果 $k > 2n$，则$\left\{\frac{2n}{k}\right\} = \frac{2n}{k}$. 所以当 $k > 2n$ 时，由(1)式有恒等式

$$AS(n, k) = \frac{n^2}{k} + n - \frac{2n^2}{k} - \frac{n^2}{k} + n + \frac{2n^2}{k} - n = n$$

又由于$-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right) \geqslant 0$，所以注意到$0 \leqslant \left\{\frac{2n}{k}\right\} \leqslant \frac{k-1}{k}$，根据(1)式我们立刻推出当 $k < 2n$ 时有估计式

$$0 \leqslant AS(n, k) \leqslant \frac{n^2}{k} + n \tag{2}$$

由(2)式不难推出当 $\mathrm{Re}(s) > 3$ 时，Dirichlet 级数 $F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n, k)}{n^s}$ 绝对收敛. 特别对 $k = 2$，注意到当 $2 \mid n$ 时有 $AS(n, 2) = \frac{n^2}{2} + n$；当 n 为奇数时有

$$AS(n, 2) = \frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} = \\ \frac{1}{2^s}\zeta(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}\end{aligned}$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

所以我们有恒等式

$$\begin{aligned}F_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n, 2)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(2n, 2)}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(2n-1, 2)}{(2n-1)^s} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(2n)^2}{2} + 2n}{(2n)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(2n-1)^2}{2} + 2n - 1 + \frac{1}{2}}{(2n-1)^s} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{s-1}} = 2\zeta(s-2) + \frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s-1)\end{aligned}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数. 于是证明了命题 1.

现在我们证明命题 3(类似地可以推出命题 2). 当 $\mathrm{Re}(s) > 3$ 时，由(1)式我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n^2, 4)}{n^s} = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^4}{4} + n^2 - n^2\left\{\frac{n^2}{2}\right\} - 4\left\{\frac{n^2}{4}\right\}^2 + 4\left\{\frac{n^2}{4}\right\} + 2\left\{\frac{n^2}{2}\right\}^2 - 2\left\{\frac{n^2}{2}\right\}}{n^s} = \\ &\frac{1}{4}\zeta(s-4) + \zeta(s-2) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{s-2}} - \\ &4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{4}\right\}^2 - \left\{\frac{(2n-1)^2}{4}\right\}}{(2n-1)^s} + \\ &2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(2n-1)^2}{2}\right\}}{(2n-1)^s} =\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}\zeta(s-4)+\zeta(s-2)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s-2}}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{s}}=$$
$$\frac{1}{4}\zeta(s-4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{s}}\right)\zeta(s)$$

于是完成了命题 3 的证明.

当 $k=6$ 时，注意到当 3 不整除 n 时有 $n^2\equiv 1\pmod 3$，所以$\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=\frac{1}{3}$. 当 3 整除 n 时有$\left\{\frac{n^2}{3}\right\}=0$. 由 (1) 式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(2n^2,\ 6)}{n^s}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(2n^2)^2}{6}+2n^2-2n^2\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}-6\left\{\frac{n^2}{3}\right\}^2+6\left\{\frac{n^2}{3}\right\}+3\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}^2-3\left\{\frac{2n^2}{3}\right\}}{n^s}=$$
$$\frac{2}{3}\zeta(s-4)+2\zeta(s-2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s-2}}-$$
$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s}}+$$
$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{2(3n-1)^2}{3}\right\}}{(3n-1)^{s}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s-2}}-$$
$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s}}+$$
$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}^2-\left\{\frac{2(3n-2)^2}{3}\right\}}{(3n-2)^{s}}=$$
$$\frac{2}{3}\zeta(s-4)+2\zeta(s-2)-\frac{4}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}-\frac{1}{3^{s-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2}}\right)+$$
$$\frac{2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}-\frac{1}{3^{s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}\right)=$$
$$\frac{2}{3}\zeta(s-4)+\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3^{s-1}}\right)\zeta(s-2)+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^{s}}\right)\zeta(s)$$

于是证明了命题 4.

为证明命题 5，我们注意到对任意素数 $p\geqslant 3$ 以及正整数 n 且$(n,\ p)=1$，由著名的 Euler(或 Fermat)定理知 $n^{p-1}\equiv 1\pmod p$. 于是有$\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}=\frac{2}{p}$. 从而由公式(1)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{AS(n^{p-1},\ p)}{n^s}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n^{2p-2}}{p}+n^{p-1}-n^{p-1}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}-p\left\{\frac{n^{p-1}}{p}\right\}^2+p\left\{\frac{n^{p-1}}{p}\right\}+\frac{p}{2}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}^2-\frac{p}{2}\left\{\frac{2n^{p-1}}{p}\right\}}{n^s}= \tag{3}$$
$$\frac{1}{p}\sum_{\substack{n=1\\(n,\ p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{s-2p+2}}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,\ p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{s-p+1}}+\frac{1}{p}\sum_{\substack{n=1\\(n,\ p)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

由于 $\sum_{\substack{n=1\\(n,\ p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$，由(3)式我们立刻推出恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{AS(n^{p-1},\ p)}{n^s} =$$

$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^{s-2p+2}}\right)\zeta(s-2p+2)+\left(1-\frac{2}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s-p+1}}\right)\zeta(s-p+1)+\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$$

于是完成了所有命题的证明.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] KASHIHARA K. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[4] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[5] 蒋剑平，敬政雄. 一类亚纯函数的正规定则[J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(10)：48-50.

[6] 胡中伟. 亚纯函数的分担值与正规族[J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：42-44.

[7] 黄　炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：15-18.

One Kind Dirichlet Series Involving the Smarandache Summands Function

CHEN　Jiao

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: For any positive integer n and any fixed integer $k>1$, M. Bencze defined the Smarandache Summands functions $AS(n,\ k)$. Then he asked us to study the arithmetical properties of this function. The main purpose of this paper is using the properties of the Gauss function and the elementary method to study the calculating problem of one kind Dirichlet series involving the function $AS(n,\ k)$, and gives some exactly calculating formulas for some special positive integer k.

Key words: Smarandache summands function; Dirichlet series; elementary method; calculating formula

责任编辑　覃吉康