文章编号:1004-3918(2017)02-0180-04

一类包含伪Smarandache函数与欧拉函数的方程

高 丽, 赵祈芬

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:利用初等方法以及伪Smarandache函数和Euler函数的性质,讨论了一个数论函数方程 $Z(n^2)=\varphi(n^2)$ 的可解性,证明了该方程仅有正整数解 $n=1$.

关键词:伪Smarandache函数; Euler函数; 方程; 正整数解

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

An Equation Involving the Pseudo-Smarandache Function and Euler Function

GAO Li, ZHAO Qifen

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: The solvability of the equation $Z(n^2)$ equalled $\varphi(n^2)$ was studied by using elementary methods and the Pseudo- Smarandache functions and Euler functions. It was proved that the equation had only positive integer solution equalled 1.

Key words: Pseudo-Smarandache function; Euler function; equation; integer solution

F. Smarandache教授介绍了伪Smarandache函数,鼓励让我们去研究它的性质. 对于给定的自然数 n,伪Smarandache函数[1]定义为最小的正整数 m,使得 $n\mid\dfrac{m(m+1)}{2}$. 即

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{N},\ n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

$\varphi(n)$ 为欧拉函数,它表示小于 n 而且与 n 互素的所有正整数的个数. 容易得到伪Smarandache函数的序列 $\{Z(n)\}$:1,3,2,7,4,3,6,15,8,4 $\cdots$. 关于 $Z(n)$ 的初等性质,许多学者已进行了研究,并获得了不少有意义的结果. 例如:张爱玲[2]研究了方程 $\sum\limits_{n=1}^{m}Z(n)=\dfrac{m(m+1)}{2}$ 成立当且仅当 $n=1,3$.

Kenichiro Kashihhara在文献[3]中论述了函数 $Z(n)$ 的一些初等性质,同时也提出了下面两个问题:

(A)求方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解;

(B)求方程 $Z(n)+1=\varphi(n)$ 的所有正整数解.

张文鹏[4]教授提出了关于F. Smarandache函数的相关问题,其中包括求 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解的

收稿日期: 2016-11-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目——引导项目(YD2014-05)

作者简介: 高 丽(1966-),女,教授,硕士生导师,研究方向为解析数论;
赵祈芬(1991-),女,硕士研究生,研究方向为数论.

问题．范盼红[5]在其硕士论文《对Catalan数的性质以及关于Smarandache函数的几个方程的研究》中利用初等方法对此问题进行了研究，并给出了该方程的解有如下形式：

① $n=p$，其中 p 为素数；

② $n=2p$，其中 $p\equiv 1(\bmod 4)$；

③ $n=2^k p$，其中 $p\equiv 1(\bmod 4)$，且 $p\mid\left(2^{k-1}-1\right)$．

鲁伟阳在文献[6]中研究了 $Z(n^2)=\varphi(n)$ 的所有正整数解的问题．

其他有关伪Smarandache函数的研究工作可参阅文献[7-20]．

本文利用初等方法求出下列方程：

$$Z\left(n^2\right)=\varphi\left(n^2\right)$$

的可解性问题及其所有正整数解．

1 相关定义及引理

定义1[21] 伪Smarandache函数 $Z(n)$：最小的正整数 m 使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，即

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in\mathbb{N},\ n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}.$$

定义2[22] Euler函数 $\varphi(n)$：不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数．

引理1[22] Euler函数为积性函数，即对于任意互素的正整数 m 和 n，则有

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n).$$

引理2[22] 设 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，则有

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{k_i-1}\left(p_i-1\right).$$

引理3[22] 对于素数 p 与 $\alpha\geqslant 1$，有 $\varphi\left(p^k\right)=p^k-p^{k-1}$．

引理4[23] 对任意素数 $p\geqslant 3$，$Z\left(p\right)=p-1$．

引理5[23] 对任意素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in N,Z\left(P^k\right)=p^k-1$．当 $p=2$ 时，则有

$$Z\left(2^k\right)=2^{k+1}-1.$$

引理6[23] $Z(n)$ 是不可加的，即 $Z(m+n)$ 不恒等于 $Z(m)+Z(n)$；$Z(n)$ 也不是可乘的，即 $Z(mn)$ 不恒等于 $Z(m)Z(n)$．

2 主要结论及证明

定理对任意的正整数 n，方程

$$Z\left(n^2\right)=\varphi\left(n^2\right) \tag{1}$$

仅有正整数解 $n=1$．

证明用初等方法给出定理的直接证明．

对正整数n进行分类讨论．

1）当n为奇数时，我们分为以下几种情况讨论：

（i）$n=1$，$Z(1)=1=\varphi(1)$，所以 $n=1$ 是方程（1）的解．

（ii）$n=p$，其中p为素数，且 $p\geqslant 3,Z\left(p^2\right)=p^2-1,\varphi\left(p^2\right)=p^2-p$，则 $Z\left(p^2\right)\neq\varphi\left(p^2\right)$，所以 $n=p$ 不是方程（1）的解．

(iii) $n=p^k$，其中p为素数，且 $p\geqslant 3,k>1$，$Z\left(p^{2k}\right)=p^{2k}-1,\varphi\left(p^{2k}\right)=p^{2k}-p^{2k-1}$，当 $k>1$ 时有 $p^{2k}-1\neq p^{2k}-p^{2k-1}$，所以 $n=p^k$ 不是方程(1)的解.

(iv) $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 均大于2，$k_1,k_2,\cdots,k_s\geqslant 0$，$s\geqslant 2$，$\varphi\left(n^2\right)=p_1^{2k_1-1}p_2^{2k_2-1}\cdots p_s^{2k_s-1}\left(p_1-1\right)\left(p_2-1\right)\cdots\left(p_s-1\right)$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi\left(n^2\right)$，根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^2\left|\dfrac{\varphi\left(n^2\right)\left[\varphi\left(n^2\right)+1\right]}{2}\right.$，即

$$p_1^{2k_1}p_2^{2k_2}\cdots p_s^{2k_s}\left|p_1^{2k_1-1}p_2^{2k_2-1}\cdots p_s^{2k_s-1}\left(p_1-1\right)\left(p_2-1\right)\cdots\left(p_s-1\right)\right.,$$

亦即

$$p_1p_2\cdots p_s\left|\left(p_1-1\right)\left(p_2-1\right)\cdots\left(p_s-1\right)\right..$$

显然不成立，所以 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$ 不是方程(1)的解.

2)当n为偶数时，我们分为以下几种情况讨论：

(i) $n=2^k$，其中 $k>0$，$Z\left(2^{2k}\right)=2^{2k+1}-1,\varphi\left(2^{2k}\right)=2^{2k-1}$，则 $Z\left(n^2\right)\neq\varphi\left(n^2\right)$，所以 $n=2^k$ 不是方程(1)的解.

(ii) $n=2^kp^l$，其中 $k>0$，p 为素数，$l\geqslant 1$，$\varphi\left(2^{2k}p^{2l}\right)=\varphi\left(2^{2k}\right)\varphi\left(p^{2l}\right)=2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi\left(n^2\right)$，根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^2\left|\dfrac{\varphi\left(n^2\right)\left[\varphi\left(n^2\right)+1\right]}{2}\right.$，即

$$2^{2k}p^{2l}\left|\frac{2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]}{2}\right.,$$

即

$$2p\left|\frac{\left(p-1\right)\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]}{2}\right..$$

但是，由于 $p\nmid\left(p-1\right)$，$p\nmid\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]$，故 $p\nmid\dfrac{\left(p-1\right)\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]}{2}$，所以

$$2p\nmid\frac{\left(p-1\right)\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]}{2},$$

即

$$2p\left|\frac{\left(p-1\right)\left[2^{2k-1}p^{2l-1}\left(p-1\right)+1\right]}{2}\right.$$

不成立，所以 $n=2^kp^l$ 不是方程(1)的解.

(iii) $n=2^kp_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 均大于2，$k,k_1,k_2,\cdots,k_s\geqslant 0$，$s\geqslant 2$．令 $n=2^km$，$2\nmid m$，由于 $\left(2^k,m\right)=1$，则 $\varphi\left(n^2\right)=2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)$，如果 $Z\left(n^2\right)=\varphi\left(n^2\right)$，根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^2\left|\dfrac{\varphi\left(n^2\right)\left[\varphi\left(n^2\right)+1\right]}{2}\right.$，即

$$2^{2k}m^2\left|\frac{2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)\left[2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)+1\right]}{2}\right.,$$

即

$$2^{2k}m^2\left|2^{2k-2}\varphi\left(m^2\right)\left[2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)+1\right]\right..$$

又 $\left(2^{2k},m^2\right)=1,2^{2k}\nmid 2^{2k-2}\varphi\left(m^2\right),m^2\nmid\left[2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)+1\right]$，所以 $2^{2k}m^2\nmid 2^{2k-2}\varphi\left(m^2\right)\left[2^{2k-1}\varphi\left(m^2\right)+1\right]$，得出矛盾，所以

$n=2^k p_1^{k_1} p_2^{k2} \cdots p_s^{k_s}$ 不是方程(1)的解.

综上所述,方程(1)仅有正整数解 $n=1$.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publication House, 1993.

[2] 张爱玲. 关于伪Smarandache函数的一个方程及其正整数解[J]. 西北大学学报(自然科学版),2008,38(4):535-540.

[3] KASHHAEA K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[4] 张文鹏. 关于F. Smarandache函数的两个问题[J]. 西北大学学报(自然科学版),2008,38(2):173-176.

[5] 范盼红. 对Catalan数的性质以及关于Smarandache函数的几个方程的研究[D]. 西安:西北大学,2012.

[6] 鲁伟阳. 一类包含伪Smarandache函数与Euler函数的方程[J]. 河南科学,2013,31(10):1597-1599.

[7] LIU Yanni. On the Smarandache pseudo number sequence[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2006, 10(4): 42-59.

[8] LOU Yuanbing. On the pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[9] ZHENG Yanni. On the the pseudo Smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 50-53.

[10] 马金萍,刘宝利. 一个包含Smarandache函数的方程[J]. 数学学报(中文版),2007,50(5):1185-1190.

[11] 范盼红. 关于伪Smarandache函数与Euler函数的三个方程的研究[J]. 黑龙江大学(自然科学学报),2012,29(5):626-628.

[12] 乐茂华. 关于Smarandache函数的一个猜想[J]. 黑龙江大学(自然科学学报),2007,24(5):687-688.

[13] 李玲,姚维利. 一个包含Smarandache 函数与伪Smarandache 函数的方程友其正整数解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2010,33(3):200-202.

[14] 杜凤英. 关于Smarandache函数 $S(n)$ 的一个猜想[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(2):205-208.

[15] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值[J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):351-354.

[16] 熊海. Smarandache函数与伪Smarandache函数相关性质研究[J]. 数学理论与应用,2010,30(2):123-128.

[17] 高丽,鲁伟阳,郝虹斐. 包含伪Smarandache函数与Euler 函数的两个方程[J]. 陕西科技大学学报,2013,31(6):163-165.

[18] 张利霞,赵西卿. 一类包含伪Smarandache函数的方程[J]. 延安大学学报(自然科学版),2016,35(3):13-15.

[19] 鲁伟阳,高丽,郝虹斐. 关于 Smarandache 双阶乘函数与伪Smarandache 函数的混合均值[J]. 江西科学,2014,32(2):189-191,251.

[20] 黄炜. 关于伪Smarandache函数 $Z(n)$ 的两个问题 [J]. 吉首大学学报(自然科学版),2014,35(5):10-13.

[21] SANDOR J. On a dual of the Pseudo Smarandache Function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.

[22] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[23] 马荣. Smarandache函数及其相关问题研究[M]. 北京:教育出版社,2012.

[24] 潘承洞,潘承彪. 初等数论[M]. 北京:北京大学出版社,2003.

[25] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2007.

[26] 闵嗣鹤,严士键. 初等数论[M]. 北京:高等教育出版社,1981.

(编辑 康 艳)