第 35 卷 第 3 期
2016 年 9 月

延安大学学报(自然科学版)
Journal of Yanan University(Natural Science Edition)

Vol. 35 No. 3
Sep. 2016

DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2016.03.013

一类包含伪 Smarandache 函数的方程

张利霞,赵西卿

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要: 对于任意正整数 n,$Z(n)$,$SL(n)$,$\varphi_e(n)$ 分别为伪 Smarandache 函数,Smarandache LCM 函数和广义 Euler 函数。利用 $Z(n)$,$SL(n)$,$\varphi_e(n)$ 的基本性质结合初等方法研究了方程 $Z(SL(n)) = \varphi_e(n)$ 在 $e=1,2$ 时的可解性,并给出方程的所有正整数解.

关键词: 伪 Smarandache 函数; Smarandache LCM 函数; 广义 Euler 函数; 正整数解

中图分类号: O156.4　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1004-602X(2016)03-0013-03

对于任意正整数 n,伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$,即 $Z(n) = \min\{m: m \in \mathbf{N}, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$[1]。Smarandache LCM 函数定义为最小的正整数 k 使得 $n \mid [1,2,\cdots,k]$,即 $SL(n) = \min\{k: k \in \mathbf{N}, n \mid [1,2,\cdots,k]\}$[2]。

对于任意整数 $e \geqslant 1$,广义 Euler 函数定义为

$$\varphi_e(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n/e \\ (i,n)=1}} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i,n)=1}}^{[\frac{n}{e}]} 1,$$

特别地,当 $e \mid \varphi(n)$ 时,有 $\varphi_e(n) = \frac{\varphi(n)}{e}$[3]。

近年来,许多学者对伪 Smarandache 函数,Smarandache LCM 函数和 Euler 函数的性质进行了研究并取得了许多有意义的结果[4-8],例如文[5]求解了方程 $Z(n) = S(n)$ 和 $Z(n) + 1 = S(n)$ 的所有正整数解。文[6]研究了函数方程 $\varphi(n) = Z(n^2)$,得出它仅有 $n=1$ 的正整数解。文[7]中研究了复合函数 $SL(Z(n))$ 的均值,并得到一个较强的渐进公式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(Z(n)) = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i(2x)^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数,$Z(n)$ 为著名的伪 Smarandache 函数。

文[8]研究了方程 $S(SL(n)) = \varphi(n)$ 的可解性并得出方程仅有 $n=1,8,9,12,18$ 的解。

本文在上述文献的启示下,主要研究伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 和 LCM 函数 $SL(n)$ 的复合函数与广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ $(e=1,e=2)$ 之间的关系,结论丰富了对伪 Smarandache 函数、LCM 函数和 Euler 函数的研究内容,具体结果如下:

定理 1　方程 $Z(SL(n)) = \varphi(n)$ 有且仅有 $n=1,p,2p$ 的解,其中 p 为奇素数。

定理 2　方程 $Z(SL(n)) = \varphi_2(n)$ 有且仅有 $n=12,3p,4p,6p$ 的解,其中 $p \geqslant 5$ 为奇素数。

1 相关引理

引理 1[9]　对任意正整数 n,$SL(n) = \max\{p_i^{\alpha_i}\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,其中 $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,$p_i$ 为素数,特别地 $SL(p^\alpha) = p^\alpha$。

收稿日期: 2016-05-06
基金项目: 陕西省教育厅科研计划资助项目(2013JK0557);延安大学研究生教育创新计划项目(YCX201610)
作者简介: 张利霞(1989-),女,陕西榆林人,延安大学硕士研究生。

引理 2[10] 对任意素数 $p\geqslant 3$ 和任意的 $k\in\mathbf{N}$，

(1) $Z(p^k)=p^k-1$;

(2) $Z(2^k)=2^{k+1}-1$。

引理 3[11] Euler 函数是积性函数。即对任意互素的正整数 a 和 b，有 $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$。

引理 4 对于正整数 n，

(1) 方程 $\varphi(n)=1$，仅整数解 $n=1,2$;

(2) 方程 $\varphi(n)=2$，仅整数解 $n=3,4,6$。

证明 (1) 当 $n=1,2$ 时，显然 $\varphi(n)=1$。

当 $n>2$ 时，由文献[2]第 6-1 节得

$\varphi(n)=2k,(k=1,2,3,\cdots)$，显然 $\varphi(n)\neq 1$。

综上方程 $\varphi(n)=1$，仅整数解 $n=1,2$。

(2) 证明参照文献[12]。

2 定理 1 的证明

当 $n=1$，显然是方程的解。

下面我们在证当 $n>1$ 之前，先设 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$，其中 $(p_i,p_j)=1(i\neq j)$。

(1) 当 $k=1$，即 $n=2^\alpha$ 或 $n=p^\alpha$，其中 p 为奇素数，我们讨论方程 $Z(SL(n))=\varphi(n)$ 的解。首先讨论当 $n=2^\alpha$ 时，我们有

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，$Z(SL(2))=3=\varphi(2)=1$ 矛盾，故方程无解。

(ⅱ) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，$Z(SL(2^\alpha))=2^{\alpha+1}-1$ 显然是奇数，但 $\varphi(2^\alpha)=2^{\alpha-1}$ 显然是偶数，故方程无解。

接着讨论当 $n=p^\alpha$(p 为奇素数) 时，我们有

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，$Z(SL(p))=p-1=\varphi(p)$ 恒成立，故 $n=p$ 是方程的解。

(ⅱ) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，$S(SL(p^\alpha))=p^\alpha-1=\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$ 矛盾，因为 $p\mid\varphi(p^\alpha)$，但 $p\nmid Z(SL(p^\alpha))$，故方程无解。

综上当 $k=1$ 时，$n=p$ 是方程的解。

(2) 当 $k\geqslant 2$，设 $\varphi(n)=\varphi(p^\alpha)\varphi(\frac{n}{p^\alpha})=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，

其中 $n_1=\frac{n}{p^\alpha},(p^\alpha,n_1)=1$。

令 $\max\{p_i^{\alpha_i}\}=p^\alpha$，由引理 1 有

$Z(SL(n))=Z(p^\alpha)$。

下面我们讨论方程 $Z(SL(n))=\varphi(n)$ 在 $k\geqslant 2$ 的解。

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，要使 $Z(SL(n))=p-1=\varphi(n)=(p-1)\varphi(n_1)$ 成立，即 $\varphi(n_1)=1$，结合引理 4 得 $n_1=1,2$，进而根据题设 $k\geqslant 2$ 得 $n=2p$，故 $n=2p$ 是方程的解。

(ⅱ) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，同样要求 $Z(SL(n))=p^\alpha-1=\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$ 的解，首先求解 $\varphi(n_1)$ 的值。因为 $p^\alpha-1=(p-1)(p^{\alpha-1}+p^{\alpha-2}+\cdots+p+1)$，所以 $\varphi(n_1)=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ +\frac{1}{p^{\alpha-1}}$，显然 $\varphi(n_1)$ 无整数值，故方程无解。

综上当 $k\geqslant 2$ 时，$n=2p$ 是方程的解。

3 定理 2 的证明

当 $n=1$，显然方程无解。

下面我们在证当 $n>1$ 之前，同样先设 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$，其中 $(p_i,p_j)=1(i\neq j)$。

(1) 当 $k=1$，即 $n=2^\alpha$ 或 $n=p^\alpha$，其中 p 为奇素数，我们讨论方程 $Z(SL(n))=\varphi_2(n)$ 的解。首先讨论当 $n=2^\alpha$ 时，我们有

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，$Z(SL(2))=3=\varphi_2(2)=1$ 矛盾，故方程无解。

(ⅱ) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，$Z(SL(2^\alpha))=2^{\alpha+1}-1$ 显然是奇数，但 $\varphi_2(2^\alpha)=2^{\alpha-2}$ 显然是偶数，故方程无解。

接着讨论当 $n=p^\alpha$(p 为奇素数) 时，我们有

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，$Z(SL(p))=p-1=\varphi_2(p)=\frac{1}{2}\varphi(p)$ 矛盾，故方程无解。

(ⅱ) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时，$S(SL(p^\alpha))=p^\alpha-1=\varphi_2(p^\alpha)=\frac{1}{2}p^{\alpha-1}(p-1)$ 矛盾，同样因为 $p\mid\varphi_2(p^\alpha)$，但 $p\nmid Z(SL(p^\alpha))$，故方程无解。

综上当 $k=1$ 时，方程无解。

(2) 当 $k\geqslant 2$，设 $\varphi_2(n)=\frac{1}{2}\varphi(p^\alpha)\varphi(\frac{n}{p^\alpha})=\frac{1}{2}p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，

其中 $n_1=\frac{n}{p^\alpha},(p^\alpha,n_1)=1$。

令 $\max\{p_i^{\alpha_i}\}=p^\alpha$，由引理 1 有

$Z(SL(n))=Z(p^\alpha)$。

下面我们讨论方程 $Z(SL(n))=\varphi_2(n)$ 在 $k\geqslant 2$ 的解。

(ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，要使 $Z(SL(n)=p-1=\varphi_2(n)$

$=\frac{1}{2}(p-1)\varphi(n_1)$ 成立，即 $\varphi(n_1)=2$，结合引理 4 得 $n_1=3,4,6$。根据题设条件易得：当 $p=3$ 时，$n=12$ 是方程的解；当 $p\geqslant 5$ 时，$n=3p,4p,6p$ 是方程的解。

（ⅱ）当 $\alpha\geqslant 2$ 时，同样要求 $Z(SL(n))=p^{\alpha}-1=\varphi_2(n)=\frac{1}{2}p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$ 的解，同样要先求解 $\varphi(n_1)$ 的值。

因为 $p^{\alpha}-1=(p-1)(p^{\alpha-1}+p^{\alpha-2}+\cdots+p+1)$，

所以 $\varphi(n_1)=2+\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}++\frac{2}{p^{\alpha-1}}$，

显然 $\varphi(n_1)$ 无整数值，故方程无解。

综上当 $k\geqslant 2$ 时，$n=12,3p,4p,6p$ 是方程的解，其中 $p\geqslant 5$ 为奇素数。

猜想：方程 $Z(SL(n))=\varphi_3(n)$ 有可数个解。

参考文献：

[1] Sandor J. On a dual of the Pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal，2002，13：18－23.

[2] 张文鹏．初等数论［M］．西安：陕西师范大学出版社，2007.

[3] 蔡天新．数论－从同余的观点出发［M］．北京：高等教育出版社，2012.

[4] Kashhaea K. Comments and topics on Smarandache notions and problems［M］. New Mexico：Erhus University Press，1996.

[5] 张文鹏．关于 F. Smarandache 函数的两个问题［J］．西北大学学报(自然科学版)，2008，38(2)：173－176.

[6] 高丽，鲁伟阳，郝虹斐．一类包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程［J］．河南科学，2013，31(10)：1597－1599.

[7] 刘华，吕松涛．一个包含 F. Smarandache 函数的复合函数［J］．江西科学，2009，27(3)：325－327.

[8] 张利霞，赵西卿，郭瑞，等．关于数论函数方程 $S(SL(n))=\varphi(n)$ 的可解性［J］．纯粹数学与应用数学，2015，31(5)：533－536.

[9] Liu Y N，Li L，Liu B L. Smarandache unsolved problems and new progress［M］. Ann Arbor，MI：High American Press，2008.

[10] Mark F，Patrick M. Bounding the Smarandache function［C］. Smarandache notions. Rehoboth，NM：American Research Press，2002：37－42.

[11] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory［M］. New York：Spring－Verlag，1976.

[12] 多布杰．关于欧拉函数方程 $\varphi(\varphi(x))=2t$ 的可解性［J］．纯粹数学与应用数学，2014，30(6)：564－568.

［责任编辑　毕　伟］

An Enquation Involving the Pseudo Smarandache Function

ZHANG Li-xia，ZHAO Xi-qing

(College of Mathematics and Computer Science，Yan´an University，Yan´an 716000，China)

Abstract: For any positive integer，$Z(n)$，$SL(n)$，$\varphi_e(n)$ is pseudo Smarandache function，Smarandache LCM function and generalized Euler function. The solvability of equation $S(SL(n))=\varphi_e(n)$ $e=1,2$ was studied and all the positive integer solutions of the equation were given by using the property of $S(n)$，$SL(n)$，$\varphi_e(n)$ and elementaey method.

Key words: pseudo Smarandache function；Smarandache LCM function；generalized Euler function；positive integer solutions