第 28 卷 第 2 期　　阿坝师范高等专科学校学报　　2011 年 6 月
Vo1.28 No.2　　JOURNAL OF ABA TEACHERS COLLEGE　　Jun.2011

与 Smarandache 乘法函数 $D_m(n)$ 有关的一个方程

杨仕椿，吴文权

（阿坝师范高等专科学校 数学与财经系，四川 郫县 611741）

【摘　要】在文献[8]中，Li 研究了一个关于 Smarandache 乘法函数 $D_m(n)$ 的丢番图方程，并且给出了方程的全部正整数解. 本文首先指出文献[8]中的错误，然后利用 Ljunggren 和 Nagell 关于方程 $\frac{x^r-1}{x-1}=y^q$ 的深刻结论，给出了该类 Smarandache 乘法函数方程的一些正整数解.

【关键词】Smarandache 乘法函数；丢番图方程；正整数解

【中图分类号】O156.7　　【文献标识码】A　　【文章编号】1008-4142(2011)02-0066-02

1 引言及主要结论

对任意正整数 n 和 m，其中 $m \geqslant 2$，定义 n 的 Smarandache 乘法函数 $Dm(n)$ 为 n 的无 m 次方幂部分，即

$$D_m(n) = \min\left\{ \frac{n}{d^m} : d^m \mid n, d \in N \right\} \tag{1}$$

Smarandache 乘法函数 $D_m(n)$ 的各类性质，被许多作者研究（参见文献[1-8]），例如，Liu[5]，Li[6]研究了 $D_m(n)$ 的渐近公式，等等.

在文献[7]中，Le 首先研究了关于 Smarandache 乘法函数 SSC(n) 的一个丢番图方程，其中 SSC(n) 定义为 Smarandache 平方余函数，即 $SSC(n) = D_2(n)$. 他求出了方程

$$SSC(n)^r+SSC(n)^{r-1}+\cdots+SSC(n)^2+SSC(n)=n, r>1 \tag{2}$$

的所有正整数解 (n, r).

最近 Li 在文献[8]中讨论了方程(2)的推广情形，即关于 Smarandache 乘法函数 $D_m(n)$ 的方程

$$D_m^{t+r}(n)+D_m^{t+r-1}(n)+\cdots+D_m^{t+2}(n)+D_m^{t+1}(n)=n, r>1 \tag{3}$$

并给出了方程(3)的所有正整数解(n, r). 然而文献[8]中的证明是不完整的，因为其中的关于丢番图方程

$$\frac{x^r-1}{x-1}=y^q, x>1, y>1, r>1, q>1 \tag{4}$$

的解的引理有误. 事实上，方程(4)并未完全解决，目前只解决了一些特殊情形[9-12]. 例如，Ljunggren[11]求出了方程(4)在 q=2 时的所有正整数解. Ljunggren[11]和 Nagell[12]在 $3 \mid r$ 以及 $4 \mid r$ 时给出了一些结论. 而在一般情况下，方程(4)的求解一直是一个尚未解决的问题.

本文利用 Ljunggren 和 Nagell 关于方程(4)的深刻结论，给出了该类 Smarandache 乘法函数方程(3)的一些正整数解. 本文的主要结论是

定理 (i)如果 $m \geqslant 2$ 且 $2 \mid m$，则方程(3)仅有正整数解 $(m,t,n,r)=(k,t,a^k,a^k), (2,s,400\cdot 7^{s+1},4), (2,s,121\cdot 3^{s+1},5), (k,s,(a+1)a^{s+1},2)$，其中 $k, s, a \in N$，$2 \mid k$，$s \mid k$.

(ii)如果 $m \geqslant 2$ 且 $4 \mid r$，则方程(3)仅有正整数解 $(m,t,n,r)=(k,t,a^k,a^k), (2,s,400\cdot 7^{s+1},4)$ 其中 $k, s, a \in N$，$s \mid k$，$4 \mid a^k$.

(i)如果 $m \geqslant 2$ 且 $2 \mid m$，则方程(3)仅有正整数解 $(m,t,n,r)=(k,t,a^k,a^k), (2,s,343\cdot 18^{s+1},3)$ 其中 $k, s, a \in N$，$s \mid k$，$3 \mid a^k$.

2 定理的证明

首先给出几个引理：

引理 1[11] 若 q=2，则方程(4)仅有正整数解 $(x, y, r) = (7, 20, 4), (3, 11, 5)$.

引理 2[12] 若 $4 \mid r$，则方程(4)仅有正整数解 $(x, y, r,$

【收稿日期】2011-03-30

【基金项目】本文为四川省科技厅应用基础研究项目(2009JY0091)“双环网与点阵空时码的设计及相关数论方程的研究”和阿坝师专校级科研课题(ASA10-12)“Lebesgue-Nagelll 方程 $x^2+D=y^p$ 的一些研究及应用”的阶段性研究成果。

【作者简介】杨仕椿(1969—)，男，四川西充人，阿坝师专数学与财经系教授，研究方向：数论、组合与编码。

$q) = (7, 20, 4, 2)$.

引理 3[11] 若 $3 \mid r$, 则方程(4)仅有正整数解$(x, y, r, q) = (18, 7, 3, 3)$.

下面我们给出定理的证明.

令 $n = u^m \nu$, 其中 ν 是无 m 次方幂数, 根据 Smarandache 乘法函数 $D_m(n)$的定义, 则有 $D_m(n) = \nu$, 于是由方程(3)可得,

$$\nu^t(\nu^{r-1}+\nu^{r-2}+\cdots+\nu+1)=u^m, r>1. \quad (5)$$

如果 $\nu=1$, 则 $r=u^m$. 令 $u=a$, $m=k$, 其中 $k, a \in N$, 于是$(n, r) = (a^k, a^k)$.

如果 $\nu>1$, 由于 $\gcd(\nu^t, \nu^{r-1}+\nu^{r-2}+\cdots+\nu+1)$, 则由方程(5)可得

$$\nu^t=u_1^m, \nu^{r-1}+\nu^{r-2}+\cdots+\nu+1=u_2^m \quad (6)$$

其中 $u_1 u_2 = u$.

当 $r>2$ 时, 由引理 1– 引理 3 可得, 若 $m=2$, 则方程(6)仅有正整数解$(\nu, u_2, r, m) = (7, 20, 4, 2), (3, 11, 5, 2)$, 若 $4 \mid r$, 则方程(6)仅有正整数解$(\nu, u_2, r, m) = (7, 20, 4, 2)$, 若 $3 \mid r$, 则方程(6)仅有正整数解$(\nu, u_2, r, m) = (18, 7, 3, 3)$, 因此由 $n = u^m \nu$ 以及方程(6)可得, (6)分别仅有正整数解$(n, r) = (400 \cdot 7s+1, 4)$, 或者$(n, r) = (400 \cdot 7s+1, 4), (121 \cdot 3s+1, 5)$, 或者$(n, r) = (343 \cdot 18s+1, 3)$, 其中 $s \in N$.

当 $r=2$ 时, 我们有

$$\nu^t=u_1^m, \nu+1=u_2^m \quad (7)$$

令 $\nu=a$, 于是$(n, r) =((a+1)a^{s+1}, 2)$.

在方程(6)中, 由于 u_1 是整数, v 是无 m 次方幂数, 则 $t \mid m$. 于是令 $t=s$, $m=k$, 代入以上各式即可得定理.

于是定理得证.

【参考文献】

[1] F. Smarandache. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Li Jie. An Asymptotic Formula on Smarandache Ceil Function [J]. Research On Smaran- dache Problems In Number Theory (Collected papers), 2004, 103-106.

[3] Liu Huaning. Mean Value on two Smarandache-type Multiplicative Functions[J]. Research On Smarandache Problems In Number Theory (Collected papers), 2004, 69-72.

[4] Guo Jinbao and He Yanfeng. Several Asymptotic Formulae On A New Arithmetical Function[J]. Research On Smarandache Problems In Number Theory (Collected papers), 2004, 115-118.

[5] Liu Yanni. Mean Value of A New Arithmetic Function[J]. Scientia Magna Journal, 1(2005), No.1, 187-189.

[6] Li Zhanhu. On the Integer Part of the M-th Root and the k -th Power Free Number [J].Research On Smarandache Problems In Number Theory, 2(2005), 41-43.

[7] Le Maohua. Some Problems Concerning the Smarandache Square Complementary Func- tion (IV) [J]. Smarandache Notions Journal, 14(2004), 335-337.

[8] Li jing. An equation involving the Smarandache-type function[J]. Scientia Magna, 2(2006), No 4, 31-34.

[9] Z. F. Cao. Diophantine equations and its Applications[M]. Shanghai Jiaotong Univesite Press, 2000, 10: 149-158.

[10] Y Bugeaud,M Mignotte, Y Roy.On the Diophantine $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$ [J]. Pacific Journal of Mathematics, 193(2000), No 2, 257-268.

[11] W.Ljunggren. Noen Setninger om ubestemte likninger av formen $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$ [J]. Norsk.Mat. Tidsskr, 25(1943),17-20.

[12] T Nagell. Note sur l´equation indeterminee $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$ [J]. Norsk.Mat.Tidsskr, 2 (1920), 75- 78.

（上接第 62 页）

障人权，促进法治，防止侦查权的滥用或不当应用。博登海默说过："法律的基本作用之一乃是约束与限制权力，无论是私人权力还是政府权力。在法律统治的地方，权力的自由行使受到了规则的阻碍，这些规则使掌权者受到一定的行为方式的约束"[9]。各国的宪法都在努力限制国家权力对于权利的侵犯，我国也不应例外。

【注 释】

① 参见 2008 年 3 月 10 日在十一届全国人大一次会议上的最高人民检察院工作报告。

【参考文献】

[1] 孙昕.审前羁押制度存在的问题与对策分析[J].人民检察，2010,(11).

[2] 陈光中.21 世纪域外刑事诉讼立法最新发展[M].北京:中国政法大学出版社,2004.

[3] 卞建林,刘玫.外国刑事诉讼法[M].北京:人民法院出版社,中国社会科学出版社,2002.

[4] 陈卫东.刑事诉讼法实施问题对策研究[M].北京:中国方正出版社,2002.

[5] 李昌林.审查逮捕程序改革的进路—以提高逮捕案件质量为核心[J].现代法学,2011,(1).

[6] 崔敏.求真集—我的治学之路[M].北京:中国人民公安大学出版社,2006:356.

[7] 陈瑞华.未决羁押制度的实证研究[M].北京:北京大学出版社,2004:241.

[8] 陈瑞华.刑事诉讼的前沿问题[M].北京:中国人民大学出版社,2000.

[9] [美]博登海默.法理学:法律哲学与法律方法[M].邓正来，译.北京:中国政法大学出版社,1999.