与 Smarandache双阶乘对偶函数有关的方程

王 阳

(南阳师范学院 数学与统计学院, 河南 南阳 473061)

摘 要: 对任意的正整数 n, $S^{**}(n)$表示 Smarandache双阶乘对偶函数, $\phi(n)$表示 Euler函数. 利用初等方法研究方程 $S^{**}(n)=n$, $(S^{**}(n))^2=2n$及 $S^{**}(n)=\phi(n)$的可解性, 并给出了每个方程所有正整数解.

关键词: Smarandache双阶乘对偶函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1671-6132(2010)03-0001-03

0 引言

对任意给定的正整数 n, Smarandache双阶乘函数 $SDF(n)$定义为最小的正整数 m使得 n整除 $m!!$. 即

$$SDF(n)=\min\{m: m\in N_+, n\mid m!!\}.$$

乐茂华在文献 [1] 中研究了 $SDF(n)$的算术性质及 $SDF(n)=n$的可解性, 证明了 $SDF(n)=n$成立的充要条件是 $n=1, 9$或 $n=p$或 $n=2p$(p为素数). 王建平在文献 [2] 中研究了 $SDF(n)$的分布性质, 得到了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(SDF(n)-P(n))^2=\frac{\zeta(3)}{24}\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $P(n)$为 n的最大素因子, c_i为常数.

与 Smarandache双阶乘函数 $SDF(n)$对偶的函数 $S^{**}(n)$我们称为 Smarandache双阶乘对偶函数, 其定义如下: 当正整数 n为偶数时, $S^{**}(n)$为最大的正整数 $2m$, 使得 $(2m)!!$整除 n; 当正整数 n为奇数时, $S^{**}(n)$为最大的正整数 $2m-1$, 使得 $(2m-1)!!$整除 n. 也就是

$$S^{**}(n)=\begin{cases}\max\{2m: (2m)!!\mid n, m\in N_+\}, & n\text{为偶数};\\ \max\{(2m-1): (2m-1)!!\mid n, m\in N_+\}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

其中, $(2m)!!=2\times4\times6\times\cdots\times(2m)$, $(2m-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)$. 从定义我们知道: $S^{**}(1)=1$, $S^{**}(2)=2$, $S^{**}(3)=3$, $S^{**}(4)=2$, $S^{**}(5)=1$, $S^{**}(6)=2$, $S^{**}(7)=1$, $S^{**}(8)=4$, … 关于 $S^{**}(n)$的性质, 已引起学者们的关注. 例如, 苟素和杜晓英在文献 [3] 中利用初等方法研究了实数 $s>1$时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$的收敛性, 得到了恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\cdot\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s},$$

其中 $\zeta(s)$是 Riemann zeta函数. 杨衍婷在文献 [4] 中利用 $\sin^n x$的定积分与 $n!!$的关系研究了 $S^{**}(n)$的一次均值, 得到了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S^{**}(n)=x\left(2e^{\frac{1}{2}}-3+2e^{\frac{1}{2}}\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)+O(\ln^2 x).$$

王阳在文献 [5] 中利用 $\ln(n!!)$的渐近性质研究了 $S^{**}(n)$的二次均值, 给出了一个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(S^{**}(n))^2=\frac{13}{2}x+O\left(\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right)^3\right).$$

设 $\phi(n)$为 Euler函数. 本文的主要目的是研究方程 $S^{**}(n)=n$, $(S^{**}(n))^2=2n$及 $S^{**}(n)=\phi(n)$的可解性, 并利用初等方法给出了所有的正整数解.

1 定理及其证明

定理 1 方程 $S^{**}(n)=n$有且仅有三个正整数解 $n=1, 2, 3$.

证明 由 $S^{**}(n)$的定义知, 当 $n=1, 2, 3$时, 显然 $S^{**}(n)=n$成立. 下面我们分两种情况证明当 $S^{**}(n)=n$成立时, 必有 $n=1, 2, 3$.

收稿日期: 2009-01-02
作者简介: 王阳 (1962-), 女, 河南南阳人, 教授, 主要从事数论研究.

(Ⅰ) 当 n 为奇数时，根据 $S^{**}(n)$ 的定义，我们知道 $S^{**}(n)$ 为奇数. 设 $S^{**}(n)=2m-1$，则 $n=(2m-1)!!u$，u 为正整数，且 $2m+1$ 不整除 u. 若方程 $S^{**}(n)=n$ 有奇数解，则必存在正整数 m，u，使得 $2m-1=(2m-1)!!u$ 成立.

(1) 当 $m=1$ 时，显然 $2m-1=(2m-1)!!u$ 成立的必要条件是 $u=1$. 由于 $2m+1=3$ 且 3 不整除 1，故 $n=1$.

(2) 当 $m=2$ 时，显然 $2m-1=(2m-1)!!u$ 成立的必要条件是 $u=1$. 由于 $2m+1=5$ 且 5 不整除 1，故 $n=3$.

(3) 当 $m\geq 3$ 时，由于 $(2m-1)!!u\geq(2m-1)!!=1\times 3\times\cdots\times(2m-1)>2m-1$，所以当 $m\geq 3$ 时，对任意的正整数 u，式子 $2m-1=(2m-1)!!u$ 永远不成立.

(Ⅱ) 当 n 为偶数时，根据 $S^{**}(n)$ 的定义我们知道 $S^{**}(n)$ 为偶数. 设 $S^{**}(n)=2m$，则 $n=(2m)!!v$，v 为正整数，且 $2m+2$ 不整除 v. 若方程 $S^{**}(n)=n$ 有偶数解，则必存在正整数 m，v 使得 $2m=(2m)!!v$ 成立.

(1) 当 $m=1$ 时，显然要使 $2m=(2m)!!v$ 成立，必有 $v=1$. 由于 4 不整除 1，故 $n=2$.

(2) 当 $m\geq 2$ 时，由于 $(2m)!!v\geq(2m)!!=2\times\cdots\times(2m)>2m$，所以当 $m\geq 2$ 时，对任意的正整数 v，式子 $2m=(2m)!!v$ 永远不成立.

综合(Ⅰ)(Ⅱ)的证明，我们得到方程 $S^{**}(n)=n$ 有且仅有三个正整数解 $n=1,2,3$. 即定理 1 得证.

定理 2　方程 $(S^{**}(n))^2=2n$ 有且仅有两个正整数解 $n=2,8$.

证明　由于 $S^{**}(2)=2$，$S^{**}(8)=4$，故当 $n=2,8$ 时，$(S^{**}(n))^2=2n$ 成立. 下面我们证明若 $(S^{**}(n))^2=2n$ 成立，则 $n=2,8$.

(Ⅰ) 当 n 为奇数时，由 $S^{**}(n)$ 的定义知 $S^{**}(n)$ 为奇数，所以方程 $(S^{**}(n))^2=2n$ 无奇数解.

(Ⅱ) 当 n 为偶数时，设 $S^{**}(n)=2m$. 若 $(S^{**}(n))^2=2n$ 成立，则必存在正整数 m，v 使得 $(2m)^2=2(2m)!!v$ 成立，且 $2m+2$ 不整除 v.

(1) 当 $m=1$ 时，显然 $(2m)^2=2(2m)!!v$ 成立的必要条件是 $v=1$. 由于 $2m+2=4$ 且 4 不整除 1，故 $n=2$.

(2) 当 $m=2$ 时，显然 $(2m)^2=2(2m)!!v$ 成立的必要条件是 $v=1$. 由于 $2m+2=6$ 且 6 不整除 1，故 $n=8$.

(3) 当 $m\geq 3$ 时，显然 $2(2\times 3)!!=96>36=(2\times 3)^2$. 假设 $m>3$ 时，$2(2m)!!>(2m)^2$ 成立，则

$$2(2m+2)!!=2(2m+2)(2m)!!>(2m+2)(2m)^2>(2m+2)(2m+2m)>(2m+2)^2.$$

由数学归纳法知，当 $m\geq 3$ 时，$2(2m)!!>(2m)^2$ 成立. 又 $2(2m)!!v\geq 2(2m)!!$，所以当 $m\geq 3$ 时，对任意的正整数 v，$(2m)^2<2(2m)!!v$ 即 $(2m)^2=2(2m)!!v$ 永远不成立.

综合上述证明，我们得到方程 $(S^{**}(n))^2=2n$ 有且仅有两个正整数解 $n=2,8$. 即定理 2 得证.

定理 3　方程 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 有且仅有四个正整数解 $n=1,4,6,8$.

证明　由于 $S^{**}(1)=1=\phi(1)$. $S^{**}(2)=2\neq 1=\phi(2)$. 所以 $n=1$ 是 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 的整数解，$n=2$ 不是 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 的整数解. 因此我们只要证明 $n\geq 3$ 时，方程 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 有且仅有三个正整数解 $n=4,6,8$ 即可.

事实上，当 $n=4,6,8$ 时，由定义知 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 成立. 下面我们将证明 $n\geq 3$ 时，若 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 成立，则 $n=4,6,8$.

(Ⅰ) 当 $n\geq 3$ 为奇数时，由文献[6]知 $\phi(n)$ 为偶数，而 $S^{**}(n)$ 为奇数，所以 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 无大于 1 的奇数解.

(Ⅱ) 当 $n\geq 3$ 为偶数时，设 $S^{**}(n)=2m$. 若 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 成立，则必存在正整数 m，v 使得 $2m=\phi((2m)!!v)$ 成立，且 $2m+2$ 不整除 v.

(1) 当 $m=1$ 时，$2m=\phi((2m)!!v)$ 成立的必要条件是 $v=2,3$.

事实上，$m=1$ 时，$2m=\phi((2m)!!v)$ 成立即 $\phi(2v)=2$ 成立. 由于 $\phi(2)=1$，因此要使 $\phi(2v)=2$ 成立，必有 $v>1$.

当 $v>1$ 为偶数时，根据算术基本定理，可设 $v=2^{\alpha}w$，$(2,w)=1$，$\alpha\geq 1$. 由于

$$\phi(2v)=\phi(2^{\alpha+1})\phi(w)=2^{\alpha}\phi(w),$$

所以 $\phi(2v)=2$ 成立的必要条件是 $\alpha=1$，$\phi(w)=1$. 由于 $(2,w)=1$，所以 $w=1$. 故 $v=2$. 注意到 $2m+2=4$ 且 4 不整除 2，故 $n=4$.

当 $v>1$ 为奇数时，根据算术基本定理可设

$$v=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t},\ 3\leq p_1<p_2<\cdots<p_t,\ \alpha_i\geq 1,$$

$i=1,2,\cdots,t$，$t\geq 1$.

由于

$$\phi(2v)=\phi(2)\phi(v)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_t^{\alpha_t-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1),$$

所以 $\phi(2v)=2$ 的必要条件是 $t=1$，$\alpha_1=1$，$p_1=3$. 否则，当 $t\geq 2$ 时，由于

$$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1)\geqslant 4,$$

故 $\phi(2v)>2$ 矛盾. 故 $t=1$. 即 $v=p_1^{\alpha_1}$.
假如 $\alpha_1>1$，则

$$\phi(2v)=\phi(v)=\phi(p_1^{\alpha_1})=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\geqslant 2p_1^{\alpha_1-1}>2p_1>p_1\geqslant 3>2,$$

矛盾. 故 $\alpha_1=1$ 即 $v=p_1$. 假如 $p_1>3$，则 $\phi(v)=\phi(p_1)=p_1-1>2$，矛盾. 故 $p_1=3$. 所以 $v=3$. 注意到 $2m+2=4$ 且 4 不整除 3，故 $n=6$.

(2) 当 $m=2$ 时，$2m=\phi((2m)!!v)$ 成立的必要条件是 $v=1$.

事实上，$m=2$ 时，$2m=\phi((2m)!!v)$ 成立，即 $\phi(8v)=4$ 成立. 若 $v>1$，当 $(v,2)=1$ 时，由于 $v\geqslant 3$，故 $\phi(v)\geqslant 2>1$. 所以 $\phi(8v)=\phi(8)\phi(v)=4\phi(v)>4$，与 $\phi(8v)=4$ 矛盾. 当 $2\mid v$ 时，设 $v=2^{\beta}a$，$(2,a)=1$，$\beta\geqslant 1$，则 $\phi(a)\geqslant 1$，从而 $\phi(8v)=\phi(2^{\beta+3})\phi(a)=2^{\beta+2}\phi(a)\geqslant 2^{\beta+2}>2^2=4$，与 $\phi(8v)=4$ 矛盾. 因此 $v=1$. 注意到 $2m+2=6$ 且 6 不整除 1，故 $n=8$.

(3) 当 $m\geqslant 3$ 时，对任意的正整数 v，式子 $2m=\phi((2m)!!v)$ 均不成立.

事实上，由于 $(2m)!!=2^m m!=2^{m+1}mb$，$b\in N_+$，所以 $2^{m+1}m\mid(2m)!!$，又 $(2m)!!\mid(2m)!!v$，所以由算术基本定理我们可得

$$\phi(2^{m+1}m)\leqslant\phi((2m)!!)\leqslant\phi((2m)!!v).$$

当 $(m,2)=1$ 时，由于 $m\geqslant 3$，故 $\phi(m)\geqslant 2$，所以 $\phi(2^{m+1}m)=\phi(2^{m+1})\phi(m)=2^m\phi(m)\geqslant 2\times 2^m>2m$;

当 $2\mid m$ 时，设 $m=2^{\gamma}c$，$(2,c)=1$，$\gamma\geqslant 1$. 则 $\phi(c)\geqslant 1$. 从而

$$\phi(2^{m+1}m)=\phi(2^{\gamma+m+1})\phi(c)=2^{\gamma+m}\phi(c)\geqslant 2^{\gamma+m}\geqslant 2\times 2^m>2m,$$

所以当 $m\geqslant 3$ 时，对任意的正整数 v 均有 $2m<\phi((2m)!!v)$ 成立. 即 $m\geqslant 3$ 时，对任意的正整数 v 式子 $2m=\phi((2m)!!v)$ 均不成立.

综合（Ⅰ）、（Ⅱ）的证明，我们得到方程 $S^{**}(n)=\phi(n)$ 有且仅有四个正整数解 $n=1, 4, 6, 8$. 即定理 3 得证.

参　考　文　献

[1] Le Maohua. On the Smarandache double factorial function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1/3): 209－228.

[2] Wang Jianping. On the value distribution properties of the Smarandache double factorial function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 111－114.

[3] 苟素，杜晓英. 关于Smarandache对偶函数[J]. 纯粹数学与应用数学，2008，24(1)：17－20.

[4] 杨衍婷. 一个数论函数的均值问题[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2008，25(3)：340－342.

[5] Wang Yang. On the quadratic mean vale of the Smarandache dual function $S^{**}(n)$[C]. Research on Number Theory and Smarandache Notions, Hexis, 2009：109－115.

[6] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1999：158－159.

On some equations involving the Smarandache double factorial dual function

WANG Yang

(School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China)

Abstract: For any positive integer n, $S^{**}(n)$ denotes Smarandache double factorial dual function, $\phi(n)$ denotes Euler function. The main purpose of this paper is to study the positive integer solutions of equations $S^{**}(n)=n$, $(S^{**}(n))^2=2n$ and $S^{**}(n)=\phi(n)$ by using elementary methods, and give its all positive integer solutions.

Key words: Smarandache double factorial dual function; equation; positive integer solutions