两个 Smarandache 复合函数的均值估计

黄炜 [1], 赵教练 [2]

(1. 宝鸡职业技术学院基础部, 陕西 宝鸡 721013;

2. 渭南师范学院数学与信息科学系, 陕西 渭南 714000)

摘要：设 n 是正整数, $u_r(n)$ 表示不小于 n 的最小 r 边形数部分数列, $v_r(n)$ 表示不超过 n 的最大 r 边形数部分数列. 研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 与 $u_r(n)$,$v_r(n)$ 的混合均值, 并用解析方法得到了几个较强的渐近公式.

关键词：Smarandache 函数; r 边形数; 均值; 渐近公式

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2010)06-0890-05

1 引言及结论

对于任意的正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m, 即 $S(n) = \min\{m : n|m!, m \in \mathbb{N}\}$, 从 $S(n)$ 的定义和性质, 很容易推断, 对于任意正整数 n, 若它的标准素因数分解式是 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则有

$$S(n) = \max_{1\leq k\leq n} \{S(p_k^{\alpha_k})\}. \tag{1.1}$$

在文献 [1] 中 Smarandache 教授定义了三角形, 五边形及六边形数, 同时定义 r 边形数: 对于任意的正整数 m, 称自然数: $\frac{1}{2}\big(2m + m(m-1)(r-2)\big), r \geq 3$ 为一 r 角形数, 文献 [2-5] 研究了关于 r 角形数的部分数列及其均值, 特别在文献 [3] 中定义了正整数 n 的 r 边形数部分数列, 即

上部 r 边形数部分数列:

$$u_r(n) = \min\left\{m + \frac{1}{2}m(m-1)(r-2) : n \leq m + \frac{1}{2}m(m-1)(r-2), r \in \mathbb{N}, r \geq 3\right\}.$$

下部 r 边形数部分数列:

$$v_r(n) = \max\left\{m + \frac{1}{2}m(m-1)(r-2) : n \geq m + \frac{1}{2}m(m-1)(r-2), r \in \mathbb{N}, r \geq 3\right\}.$$

关于两个包含 Smarandache 函数 $S(u_r(n))$,$S(v_r(n))$ 的混合均值性质, 至今似乎没有人进行过研究, 至少我们还没有看到任何有关它的论文. 本文利用解析方法研究了这两个复合函数加权均值, 并给出了两个有趣的混合均值公式, 即就是将要证明的以下结论:

收稿日期：2010-08-19.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155), 陕西省教育厅专项计划项目 (2010JK541).

作者简介：黄炜 (1961-), 教授, 研究方向：数论.

定理　设 $k \geq 2$ 是给定正整数, 对于任意整数 $x > 1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n \leq x} S(u_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right). \tag{1.2}$$

$$\sum_{n \leq x} S(v_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{1.3}$$

其中 $c_i(i = 2, 3, \cdots, k)$ 是可计算常数. 特别地当 $k = 1$ 时, 我们有:

推论　对于任意整数 $x > 1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n \leq x} S(u_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right). \tag{1.4}$$

$$\sum_{n \leq x} S(v_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right). \tag{1.5}$$

2　引理及其证明

为了完成定理的证明, 我们需要下面几个简单的引理

引理 2.1　对于任何实数 $n > 1$, 设

$$u_r(n) = \frac{1}{2}\big(2(m+1) + m(m-1)(r-2)\big),$$

且

$$v_r(n) = \frac{1}{2}\big(2(m+1) + m(m-1)(r-2)\big)$$

则有渐近公式

$$m = \frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2} + O(1).$$

证明见文献 [3].

引理 2.2　对于任何实数 $x \geq 1$, 设 $\pi(x) = \sum_{p \leq n} 1$, 则有渐近公式

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $a_i = (i-1)!, (i = 1, 2, \cdots, k)$.

证明可参阅文献 [6].

引理 2.3　设 p 是素数, 则有

$$\sum_{p \leq n} p^2 = \frac{2}{3}x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

证明 由 Abel 求和公式 [6] 及引理 2.1 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{p\le n} p^2 &= \int_{\frac{2}{3}}^{x} t^2 \mathrm{d}\pi(t) = x^2\cdot\pi(x) - 2\int_{\frac{2}{3}}^{x} t\pi(t)\mathrm{d}t \\
&= x^2\bigg(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x} + O\Big(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\Big)\bigg) - 2\int_{\frac{2}{3}}^{x} t\bigg(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot t}{\ln^i t} + O\Big(\frac{t}{\ln^{k+1}t}\Big)\bigg)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x} + O\Big(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\Big).
\end{aligned}
$$

于是完成了引理 2.3 的证明.

3 定理的证明

下面我们将完成定理的证明. 首先看定理中 (1.2) 式的证明.

证明 对于任意正整数 $n>1$, 当

$$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2)) \le n < \frac{1}{2}(2(m+1)+m(m-1)(r-2))$$

时, 方程 $u_r(n)=\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))$ 有 $(r-2)m+1$ 个解.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2)),\\
&\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))+1,\\
&\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))+2,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))+(r-2)m,
\end{aligned}
$$

即

$$u_r\Big(\frac{1}{2}(2m+m(m-1)(r-2))+j\Big) = \frac{1}{2}\big(2m+m(m-1)(r-2)\big),\ j=0,1,2,\cdots,(r-2)m.$$

由于 $n\le x$, 所以由引理 2.1 知, 当 $u_r(n)=m$ 时,m 满足

$$1\le m\le \frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)}. \tag{3.1}$$

亦即

$$m=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1).$$

于是注意到 $S(n) \le n$ 则有

$$\sum_{n\le x} u_r(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ u_r(n)=m}} S(m) = \sum_{m\le \frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)x}}{2(r-2)}} m\cdot S(m) + O(x) \tag{3.2}$$
$$= \sum_{m\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}} m\cdot S(m) + O(x).$$

现将所有正整数 $1\le m\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}$ 分成两个子集 A 和 B, 其中 A 是满足那些存在素数 p, 使得 $p|m$, 且 $p>\sqrt{m}$ 的整数 m, 而 B 是包含区间 $\left[1, \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}\right]$ 中不属于集合 A 的那些正整数, 于是利用性质, 有

$$\sum_{n\in A} m\cdot S(m) = \sum_{\substack{m\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}\\ p|m,\sqrt{m}<p}} m\cdot S(m) = \sum_{\substack{mp\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}\\ m<p}} mp\cdot S(pm)$$
$$= \sum_{\substack{mp\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}\\ m<p}} mp\cdot p$$
$$= \sum_{m\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}} m \sum_{m<p\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{m(r-2)}} p^2. \tag{3.3}$$

由引理 2.2 我们有

$$\sum_{m<p\le \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{m(r-2)}} p^2 = \frac{1}{3(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right). \tag{3.4}$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数, 并注意到 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 由 (3.4) 和 (3.5) 式我们可以推断,

$$\sum_{n\in A} m\cdot S(m) = \frac{1}{3(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}}\sum_{m\le\sqrt{\frac{2x}{r-2}}}\frac{1}{m^2} +$$
$$\sum_{m\le\sqrt{\frac{2x}{r-2}}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+x}x}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{3.5}$$

其中 $c_i=1, c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

现在讨论集合 B 的情况, 由 (1.1) 式及集合 B 的定义知, 对于任意的 $m\in B$, 若它的标准素因数分解式是 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 则有

$$S(n) = \max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\} \le \max_{1\le i\le r}\alpha_i\cdot p_i \le \sqrt{m}\cdot\ln m. \tag{3.6}$$

于是由 (1.1) 式有

$$\sum_{n\in B} m\cdot S(m)\leq\sum_{n\in B} m\cdot\sqrt{m}\ln m\leq\sum_{m\leq\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} m^{\frac{3}{2}}\ln m\leq x^{\frac{5}{4}}\ln x. \tag{3.7}$$

由集合 A,B 的定义及 (3.2),(3.5) 和 (3.7) 式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} S(u_r(n)) &= \sum_{m\leq\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} m\cdot S(m)+O(x)=\sum_{n\in A} m\cdot S(m)+\sum_{n\in B} m\cdot S(m)+O(x)\\ &=\frac{\pi^2}{18(r-2)^3}\frac{(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2(r-2)x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i(2(r-2)x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2(r-2)x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中 $c_i=1, c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

这就完成了定理中 (1.2) 式的证明. 同理可给出定理 (1.3) 式及推论的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 张文鹏. 关于正整数的六边形数部分 [J]. 商洛师范专科学校学报, 2005(2):1-5.

[3] 黄炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值 [J]. 西南师范大学学报, 2010,35(1):15-18.

[4] 黄炜. 关于 r 角形数的补数及其均值 [J]. 科学技术与工程, 2009, 39(18):5432-5434.

[5] 杨存典, 李超, 刘端森. 关于五角形数的补数及其渐近性质 [J]. 西安工业学院学报, 2006,26(3):287-289.

[6] Pan C D, Pan C B. Foundation of Analytic Number Theory[M]. Beijing: Science Press, 1997.

Mean-value estimate for two Smarandache hybrid functions

HUANG Wei [1], ZHAO Jiao-lian [2]

(1. Department of Basis,Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, china;

2. Department of Mathematics and Informatics, Weinan Teacher‘s University, Weinan 714000, china)

Abstract: For any positive integer n, $u_r(n)n$ be the smallest r angular number greater than or equal to n, $v_r(n)$ be the largest r angular number less than or equal to n. The main purpose of this paper is using the analytic methods to study he hybrid mean value formula involving two Smarandache function $u_r(n)$ and $v_r(n)$, and several sharper asymptotic formulas are given.

Keywords: Smarandache function, r-angular number, mean value, asymptotic formula

2000MSC: 11M06