两个关于 Smarandache 函数的方程

关文吉 （渭南师范学院数学与信息科学学院）

摘要：对任意正整数 n，著名的 Smarandache 函数 S(n) 定义为最小的正整数 m，使得 n｜m!对于任意给定的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 Z(n) 定义为最小的正整数 m，使得 n｜1+2+⋯ $m=\frac{m(m+1)}{2}$。文章用初等方法研究了方程 S(n)=Z(n) 和 S(n)+Z(n)=n，并给出了它们的全部解.

关键词：Smarandache 函数　伪 Smarandache 函数　整数解

1 概述

对任意正整数 n，令 S(n) 表示 Smarandache 函数，其定义为使 n｜m!的最小的正整数 m，即 S(n)=min{m:n｜m!，m∈N}。如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式，则由定义容易推出 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{s(p_i^{\alpha_i})\}$。由此也不难算出 S(n) 的前几个值为：

S(1)=1，S(2)=2，S(3)=3，S(4)=4，S(5)=5，S(6)=3，S(7)=7，S(8)=4，S(9)=6，S(10)=5，S(11)=11，S(12)=4，S(13)=13，S(14)=7，S(15)=5，S(16)=6，……。对于任意给定的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 Z(n) 定义为最小的正整数 m，使得 n｜1+2+⋯$m=\frac{m(m+1)}{2}$，即 $Z(n)=\min\{m:m\in N,n\mid\frac{m(m+1)}{2}\}$。

由此公式可知 Z(1)=1，Z(2)=3，Z(3)=2，Z(4)=7，Z(5)=4，Z(6)=3，Z(7)=6，Z(8)=15，Z(9)=8，Z(10)=4，Z(11)=10，Z(12)=8，Z(13)=12，Z(14)=7，Z(15)=5，Z(16)=31，……。该函数是 Kashihara 在文献中提出的。Kashihara 和 Ibstedt 研究了它的性质并获得了一系列有趣的结果。

本文的主要目的是利用初等方法研究方程 S(n)=Z(n) 和 S(n)+Z(n)=n，而且把它们所有的正整数解都给出来了，也就是要证明下面的：

定理 1 如果 n 是偶完全数，则 n 必为方程 S(n)=Z(n) 的解。

定理 2 n=6，12 是方程 S(n)+Z(n)=n 仅有的两个特殊正整数解，其它正整数 n 满足方程当且仅当 n=p·u 或者 $n=p\cdot2^{\alpha}\cdot u$，其中素数 p≥7，$2^{\alpha}$｜p-1.u 是 $\frac{p-1}{2^{\alpha}}$ 的任意一个大于 1 的奇数因子。

2 定理的证明

这一部分，我们将会用初等方法直接证明定理，为此我们先要引入两个引理：

引理 n 是偶完全数的充要条件是 $n=2^{p-1}(2^p-1)$，其中 p 和 2^p-1 都是素数。

引理：如果 p 为一素数，那么 $S(p^k)\le kp$ 如果 k＜p，那么 $S(p^k)=kp$，其中 k 为任意给定的正整数。

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式，则 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$，其中 p 为素数。由引理知当 $n=2^{p-1}(2^p-1)$ 时 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{S(2^{p-1}),S(2^p-1)\}$。

$S(2^{p-1})<2(p-1)$，$S(2^p-1)=2^p-1$，

显然 $2(p-1)<2^p-1$，所以 $S(n)=S(2^p-1)=2^p-1$　(1)

由于 $n=2^{p-1}(2^p-1)=\frac{(2^p-1)\cdot2^p}{2}$，所以 $Z(n)=2^p-1$　(2)

由(1)和(2)知 如果 n 是偶完全数，则 S(n)=Z(n)。

定理 1 证毕。

下面利用初等及组合的方法来证明定理 2。

容易验证：Z(1)+S(1)=2≠1，Z(2)+S(2)=5≠2，Z(3)+S(3)=5≠3，Z(4)+S(4)=11≠4，Z(5)+S(5)=9≠5，Z(6)+S(6)=6 所以 n=1，2，3，4，5 都不是方程 S(n)+Z(n)=n 的解，n=6 是方程 S(n)+Z(n)=n 的解。所以方程的其它解一定满足 n≥7，若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式，则 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$。

注意到 p｜n 及 S(n)=u·p，故可设 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$，当 n 是方程 S(n)+Z(n)=n 的解时有 $Z(n)+u\cdot p=p^{\alpha}\cdot n_1$　(3)

首先证明 (3) 中 α=1，否则假定 α≥2，由 (3) 知 p｜Z(n)=m

由 Z(n)=m 的定义知 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，而 (m，m+1)=1，故 p^{α}｜m，从而由 (3) 推出 p^{α}｜S(n)=u·p，即 $p^{\alpha-1}$｜u，从而 $p^{\alpha-1}\le u$，但另一方面由于 $S(n)=S(p^{\alpha})=u\cdot p$，由 S(n) 的性质知 u≤α，所以 $p^{\alpha-1}\le u\le\alpha$，此式对于奇素数 p 显然不成立，如果 p=2，则当 α≥3 时，$p^{\alpha-1}\le u\le\alpha$ 也不成立。于是只有一种可能 u=α=2，注意到 n≥5 以及 S(n)=4，所以此时只有一种可能 n=12，而 n=12 是方程 S(n)+Z(n)=n 的一个解，所以如果其它正整数 n 满足方程 S(n)+Z(n)=n，则 (3) 式中必有 S(n)=p，α=u=1，此时，令 Z(n)=m=p·v，则 (3) 式成为 $v+1=n_1$ 即 n=p·(v+1)，Z(n)=p·v，再由 Z(n) 的定义知 n=p·(v+1)整除 $\frac{pv\cdot(pv+1)}{2}$ 即(v+1)整除 $\frac{v\cdot(pv+1)}{2}$，由于(v，v+1)=1，所以当 v 为偶数时由上式推出 v+1｜pv+p-p+1 即 v+1｜p-1 或者 v+1｜$\frac{p-1}{2}$。显然对 $\frac{p-1}{2}$ 的任意大于 1 的奇数因子 r，n=p·r 是方程 S(n)+Z(n)=n 的解。因为此时有 Z(p·r)=p·(r-1)。

当 v 为奇数时，由 (v+1) 整除 $\frac{v\cdot(pv+1)}{2}$ 得到 v+1｜$\frac{pv+1}{2}=\frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}$

由此知 p-1=(2k+1)(v+1)，于是可设 $p-1=2^{\beta}h$，其中 h 为奇数，则 $\frac{v+1}{2^{\beta}}$ 为小于 h 的奇数因子。容易验证对任意奇数 r｜h 且 r＜h，$n=p2^{\beta}r$ 为方程 S(n)+Z(n)=n 的解。因为此时

铸钢的高温性能研究

黄志慧 （赤峰制药股份公司）

摘要：铸钢是工厂常用的一种材料，本文主要通过研究铸钢的高温性能以及在高温状态下的抗腐蚀性能，从而提高铸钢材质的抗氧化性等，以此减慢材料的老化过程，具有重要的意义。

关键词：铸钢材料　高温性能　抗氧化性　抗腐蚀性

在我厂所使用的设备及配件中，铸钢也是一种常用的材料。研究铸钢的高温性能及在高温状态下的抗腐蚀性能，从而提高铸钢材质的抗氧化性，减慢材料的老化过程，具有相当重要的意义。在高温条件下，具有良好抗氧化性能和足够高温强度的合金钢称为耐热钢。耐热钢的耐热性能有两种涵义：一种是热化学稳定性，主要指钢在高温环境中具有较好的抗氧化能力；另一种是指高温强度，即在温度与应力共同作用下钢的断裂强度。前者是材料的化学性能，后者是材料的力学性能。习惯上称前者为热稳定钢或抗氧化钢，后者为热强钢，热稳定钢和热强钢统称为耐热钢[1]。在我厂的实际生产中，因为介质的不同，主要是热化学稳定性方面的要求。

耐热钢的应用十分广泛，而且种类繁多，按照耐热钢中合金化元素含量的不同，可将其分为低碳耐热钢、低合金耐热钢、高合金耐热钢三类[2]。低碳耐热钢不含或含有少量其他合金元素，其含碳量一般不超过 0.2%；低合金耐热钢通常含有一种或几种合金元素，但含量一般不超过 5%，其含碳量也不会超过 0.2%；高合金耐热钢中，合金元素的总含量高达 30%，但含碳量一般较低。具有代表性的高合金耐热钢有铬镍奥氏体耐热钢、高铬铁素体耐热钢等。

Cr-Mn-N 系耐热钢基体组织为奥氏体，并使用一定量锰、氮等能扩大奥氏体区的合金元素来代替部分镍，在保证材料性能的同时又节约了成本。这类钢可用来当作工作温度在 900～950℃的热处理炉的构件，如炉底板、风扇等[3]。

虽然奥氏体耐热钢可通过多元合金化来获得较好的抗蠕变性能和较高的持久强度，但其高温抗氧化性能还有缺陷。当温度超过 1000℃时，合金表面形成的 Cr_2O_3 保护膜易转变成具有挥发性的 CrO_3 等氧化物，使其过早的氧化而报废。相比而言，铁素体耐热钢虽然高温强度较差，但其高温抗氧化性能较好，在高温下合金表面生成的 Al_2O_3 保护膜致密、坚固且不易挥发，在 1200～1250℃时仍具有较高的稳定性。

综合 Cr-Ni 系奥氏体耐热钢及 Cr-Al 系铁素体耐热钢特点，科学工作者研制了一类新型 Fe-Cr-Ni-Al 双相耐热钢。这类钢具有优良的高温力学性能和高温抗氧化性能，1250℃下短时抗拉强度达到 40MPa 以上，断面收缩率在 30%左右，被用于生产可控气氛热处理炉的辐射管、炼镁反应罐和电站锅炉件等[4]。

耐热钢构件在高温下工作时不但承受拉伸、弯曲、扭转、疲劳、冲击等载荷作用，还与高温空气、蒸汽、或燃气接触，表面易发生高温氧化或气体腐蚀[5]。因此，耐热钢在高温条件下工作必须满足两个方面的性能要求：①热化学稳定性；②热强性。

热稳定性是指钢在高温下的抗氧化性能及抗高温介质腐蚀性能，其中抗氧化性能是保证工件在高温下持久工作的最基本、最重要的条件。

钢件在高温氧化环境中工作时，表面与氧发生复杂的化学反应生成铁的多种氧化物层，该氧化物层很疏松，失去了钢原有的特性，极易脱落。为提高钢的高温抗氧化性，可向钢中加入抗氧化性能比较好的合金元素，从而改变氧化物的结构[6]。常用的合金元素有铬、硅、铝等，它们均可与氧反应生成致密、稳定且与钢件表面牢固结合的 Cr_2O_3，SiO_2、Al_2O_3 等氧化膜层，这些氧化膜可以有效阻止氧、硫等腐蚀性气体向钢中扩散，也能阻止金属离子向外扩散，以保护钢体不再继续氧化。一定范围内，铬、硅、铝等合金化元素加入量越多，钢的高温抗氧化性越好，但硅、铝等加入量过多时，钢的力学性能和工艺性会变差。所以，耐热钢应以铬为主要合金元素，以硅、铝为辅助元素[7]。

钢的热强性表示金属在高温和载荷长时间作用下抵抗蠕变和断裂的能力，为了提高耐热钢的热强性，可以采用固溶强化、第二析出相强化和晶界强化等方法。

固溶强化是将某些合金元素加入耐热钢中，形成单相过饱和固溶体，从而强化其热强性。大量研究和实践表明，固溶强化是提高耐热钢热强性最有效的途径。因此通常采取向基体中加入一种或几种合金元素的办法，以形成单相固溶体，来提高基体金属的热强性。而且在元素周期表中合金元素距基体元素位置越远，强化效果越明显，Mo、Cr、Mn 等是提高金属基体热强性效果显著的几种合金元素。

第二相强化包括时效析出沉淀强化、铸造第二相骨架强化和弥散质点强化等，其强化机理是：用固溶强化手段来设置位错运动障碍不够稳定且强化效果有限，因此为了更有效的阻碍位错运动，提高耐热钢的热强性，必须使合金含有稳定的障碍物。这种障碍物可以是液态凝固时析出

（上接第 323 页）

有 $Z(p2^{\beta}r)=p(2^{\beta}r-1)$。事实上，由于 $r\mid h$，容易推出 $p2^{\beta}r$ 整除 $\frac{p(2^{\beta}r-1)[p(2^{\beta}r-1)+1]}{2}$。其次当 $m<p(2^{\beta}r-1)$ 时，不可能有 $p2^{\beta}r$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$。于是由 $Z(n)$ 的定义知 $Z(p2^{\beta}r)=p(2^{\beta}r-1)$。

定理 2 证毕。

参考文献：

[1]Ma J.P.,An equation involving the Smarandache function[J].Scientia Magna,2005(2).

[2]F.Mark,M.Patrick,Bounding the Smarandache function[J].Smarandache Journal,2002(13).

[3]F.Smarandache,Only Problems,Not Solutions [M].Chicago,Xiquan Publishing House,1993.

基金项目：陕西省教育厅项目（2013JK0889）。

作者简介：关文吉（1978–），女，陕西大荔人，渭南师范学院数学与信息科学学院讲师，理学硕士。