第 9卷 第 2期 2009年 1月
1671-1819(2009)2-0362-02

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol.9 No.2 Jan. 2009
© 2009 Sci. Tech. Engng.

两个包含 Smarandache函数和 Euler函数的方程

关文吉
(西北大学 数学系,西安 710069;渭南师范学院数学与信息科学系,渭南 714000)

摘 要 对任意正整数 n,著名的 Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m,使得 $n|m!$. Euler函数 $\varphi(n)$定义为所有不超过 n且与 n互素的正整数的个数。用初等方法研究了方程 $\varphi(n)=S(n^2)$和 $\varphi(n)=S(n^3)$,并给出了它们的全部解。

关键词 Smarandache函数 Euler函数 整数解
中图法分类号 O153.4; 文献标志码 A

对任意正整数 n,令 $S(n)$表示 Smarandache函数,其定义为使 $n|m!$ 的最小的正整数 m,即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$。如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为 n的标准因子分解式,则由定义容易推出 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$, Smarandache教授在文献[1]中介绍了这个函数并要求我们研究它的性质。Euler函数 $\varphi(n)$表示所有不超过 n且与 n互素的正整数的个数。

马金萍老师在文献[2]中研究了方程 $\varphi(n)=S(n)$,并给出了它的全部解 $n=1, 8, 9, 12, 18$。本文在研究张文鹏老师《初等数论》[3]的基础上,利用初等方法研究方程 $\varphi(n)=S(n^2)$和 $\varphi(n)=S(n^3)$,并给出了它们的全部正整数解,也就是要证明下面的:

定理 1 方程 $\varphi(n)=S(n^2)$有且仅有四个解 $n=1, 24, 25, 50$。

定理 2 方程 $\varphi(n)=S(n^3)$有且仅有四个解 $n=1, 48, 49, 98$。

用初等方法直接证明定理,为此我们先要引入一个引理:

引理[4] 如果 p为一素数,那么 $S(p^k)\leqslant kp$;如果 $k<p$,那么 $S(p^k)=kp$,其中 k为任意给定的正整数。

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为 n的标准因子分解式,

令 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$, $n=p^{\alpha}n_1$。其中 p为素数且 $(n_1, p)=1$,则

$$S(n^2)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{2\alpha_i})\}=S(p^{2\alpha})。$$

由 $\varphi(n)$的定义可得

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)=\varphi(p^{\alpha})\varphi(n_1)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)。$$

令 $\varphi(n)=S(n^2)$,则有 $p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)=S(p^{2\alpha})$。

显然 $n=1$是方程 $\varphi(n)=S(n^2)$的解,如果 $n>1$我们将分类讨论如下:

(1)令 $\alpha=1$。

如果 $p=2$,则 $S(n^2)=S(2^2)=4$, $\varphi(n)=(2-1)\varphi(n_1)$,

由 $\varphi(n)=S(n^2)$可得 $\varphi(n_1)=4$,所以 $n_1=5$,

即 $n=2\times5$,但 $\varphi(2\cdot5)=4\neq S(2^2\times5^2)=10$,所以 $n=2\times5$不是此方程的解。

如果 $p\geqslant3$,由引理可得 $S(p^2)=2p$,

$\varphi(n)=(p-1)\varphi(n_1)$,所以 $2p=(p-1)\varphi(n_1)$,解得当 $p=3$时, $\varphi(n_1)=3$,此式无解。

(2)令 $\alpha=2$。

如果 $p=2$,则 $S(n^2)=S(2^4)=6=\varphi(n)=2(2-1)\varphi(n_1)$,此式无解。

如果 $p=3$,则 $S(n^2)=S(3^4)=9=\varphi(n)=3(3-1)\varphi(n_1)$,此式无解。

如果 $p=5$,则 $S(n^2)=S(5^4)=20=\varphi(n)=5(5-1)\varphi(n_1)$,

解得 $\varphi(n_1)=1$,即 $n_1=1$, $n=5^2=25$和 $n_1=2$, $n=5^2\times2=50$是方程的解。

如果 $p\geqslant7$,则 $S(n^2)=S(p^4)=4p=\varphi(n)=$

2008年 9月 26日收到

$p(p-1)\varphi(n_1)$,

由于 $p-1>4$,故上式无解。

(3)令 $\alpha=3$.

如果 $p=2$, 则 $S(n^2)=S(2^6)=8=\varphi(n)=4(2-1)\varphi(n_1)$,

解得 $\varphi(n_1)=2$, $n_1=3$即 $n=2^3\times3=24$是方程的解。

如果 $p=3$, 则 $S(n^2)=S(3^6)=15=\varphi(n)=3^2(3-1)\varphi(n_1)$, 此式无解。

如果 $p=5$, 则 $S(n^2)=S(5^6)=25=\varphi(n)=5^2(5-1)\varphi(n_1)$, 此式无解。

如果 $p=7$, 则 $S(n^2)=S(7^6)=42=\varphi(n)=7^2(7-1)\varphi(n_1)$, 此式无解。

如果 $p>7$, 则 $S(n^2)=S(p^6)=6p=\varphi(n)=p^2(p-1)\varphi(n_1)$,

由于 $p-1>6$, 所以此式无解。

(4)令 $\alpha=4$.

如果 $p=2$, 则 $S(n^2)=S(2^8)=10=\varphi(n)=2^3(2-1)\varphi(n_1)$, 此式无解。

如果 $p\geqslant3$, 由引理可得 $S(p^8)\leqslant8p$,

由 $\varphi(n)=p^3(p-1)\varphi(n_1)$和 $p^3>8p$可得 $\varphi(n)>8p$, 故此式无解。

(5)令 $\alpha=5$

如果 $p=2$, 则 $S(n^2)=S(2^{10})=12=\varphi(n)=2^4(2-1)\varphi(n_1)$, 此式无解。

如果 $p\geqslant3$, 由引理可得 $S(p^{10})\leqslant10p$,

由 $\varphi(n)=p^4(p-1)\varphi(n_1)$和 $p^4>10p$可得 $\varphi(n)>10p$, 故此式无解。

(6)令 $\alpha\geqslant6$

如果 $p\geqslant2$, 由引理可得 $S(p^{2\alpha})\leqslant2\alpha p$,

由 $\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$和 $p^{\alpha-1}>2\alpha p$可得 $\varphi(n)>2\alpha p$, 故此式无解。

结合以上的(1)到(6),我们可得方程 $\varphi(n)=S(n^2)$有且仅有四个解 $n=1, 24, 25, 50$.

这就证明了定理 1,用同样的方法我们可以证明定理 2.

参 考 文 献

1 Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993

2 Ma J P. An equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2005, 2: 89—90

3 张文鹏. 初等数论. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007

4 Mark F, Patrick M. Bounding the Smarandache function. Smarandache Journal, 2002, 13: 37—42

Two Equations Involving the Smarandache Function and Euler Function

GUAN Wen-ji

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, 710069, P. R. China;

Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan, 714000, P. R. China)

[Abstract] For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. The Euler function $\varphi(n)$ is defined to be the number of positive integers not exceeding n which are relatively prime to n. The main purpose is using the elementary method to study the equation $\varphi(n)=S(n^2)$ and $\varphi(n)=S(n^3)$, and is given all solutions for them.

[Key words] Smarandache function Euler function solutions