两个包含近似伪Smarandache函数的渐近公式

高 丽,谢 瑞,赵 琴

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:利用初等方法研究了近似伪Smarandache函数分别与两个特殊数论函数的复合函数在简单数序列中的均值性质,并给出了两个有规律的渐近公式。

关键词:近似伪Smarandache函数;简单数;复合函数;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1004-602X(2011)02-0001-03

0 引言及结论

在文献[1]中,Vyawahare定义了一个新的函数$K(n)$,即:对任意的正整数n,$K(n)=m$,这里$m=\sum_{i=1}^{n} i+k$是使n能整除m的最小正整数。称这个函数$K(n)$为近似伪Smarandache函数。在文献[2]第23个问题中,如果一个正整数n的真因子的乘积不超过n,就称n为简单数。令A表示所有简单数的集合,即有$A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,17,19,21,\cdots\}$。容易看出,$n$有4种情形,即$n=p$,或$n=p^2$,或$n=p^3$,或$n=pq$,这里$p$,$q$是不同的素数(证明参见文献[3])。令$p_d(n)$表示$n$的全部正因子的乘积,即$p_d(n)=\prod_{d\mid n} d$。$q_d(n)$表示$n$的全部真因子的乘积,即$q_d(n)=\prod_{\substack{d\mid n\\ d<n}} d$。本文利用初等数论方法研究了$K(p_d(n))$和$K(q_d(n))$的均值性质,并给出了两个有规律的渐近公式,即证明了下面的定理(下文中出现的n,如无特殊说明,均为奇数)。

定理1 对任意的实数$x>1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} K(p_d(n))=\frac{x^5}{5\ln x}\ln\ln x+A_1\frac{x^5}{\ln x}+\frac{x^5}{25\ln^2 x}\ln\ln x-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9\ln x}+O\left(\frac{x^5}{\ln^2 x}\right).$$

其中A_1为可计算的常数。

定理2 对任意的实数$x>1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\le x}} K(q_d(n))=\frac{x^3}{3\ln x}\ln\ln x+A_2\frac{x^3}{\ln x}+\frac{x^3}{9\ln^2 x}\ln\ln x-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\ln x}+\frac{3x^2}{2\ln x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^3}{\ln^2 x}\right).$$

其中A_2为可计算的常数。

1 引理及证明

为了得到上述定理的证明,需要下面的两个引理:

引理1 设n为任意正整数,则有

$$K(n)=\begin{cases}\dfrac{n(n+3)}{2}, & \text{当 } n \text{ 是奇数时},\\[2mm] \dfrac{n(n+2)}{2}, & \text{当 } n \text{ 是偶数时}。\end{cases}$$

证明 参见文献[1]。

引理2[4] 设$k\ge 0$及$x\ge 3$是实数,p,q是两个素数,B是一可计算的常数,有渐近公式

$$\sum_{p\le x} p^k=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right) \quad (1)$$

$$\sum_{p^3\le x} p^{3k}=O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right) \quad (2)$$

$$\sum_{pq\le x} p^k q^k=\frac{2x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\ln\ln x+B\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{2x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right) \quad (3)$$

收稿日期:2011-04-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10291093);陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)

作者简介:高丽(1966—),女,陕西绥德人,延安大学教授,硕士。

证明　应用 Abel 恒等式[5]，并注意到 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$，得到

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}p^k&=\pi(x)x^k-\int_1^x \pi(t)kt^{k-1}dt\\&=\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-k\int_2^x\frac{t^k}{\ln t}dt-k\int_2^x\frac{t^k}{\ln^2 t}dt+O\left(\int_2^x\frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right)\\&=\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-\frac{k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}-\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\int_2^x\frac{t^k}{\ln^3 t}dt\right)\\&=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)\end{aligned}\tag{4}$$

应用同样的方法我们还可以得到

$$\sum_{p^3\le x}p^{3k}=\sum_{p\le\sqrt[3]{x}}p^{3k}=\pi(\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x}^{3k}-3k\int_1^{\sqrt[3]{x}}\pi(t)t^{3k-1}dt=O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right)\tag{5}$$

应用(5)式以及熟知的分拆恒等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{pq\le x}p^kq^k&=2\sum_{p\le\sqrt{x}}p^k\sum_{q\le\frac{x}{p}}q^k-\left(\sum_{p\le\sqrt x}p^k\right)\left(\sum_{q\le\sqrt x}q^k\right)\\&=2\sum_{p\le\sqrt x}p^k\left(\frac{1}{k+1}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{\ln x-\ln p}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{(\ln x-\ln p)^2}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{(\ln x-\ln p)^3}\right)\right)\\&\quad-\left(\frac{1}{k+1}\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\ln\sqrt x}+O\left(\frac{x^{\frac{k+1}{2}}}{\ln^2\sqrt x}\right)\right)^2\\&=2\sum_{p\le\sqrt x}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\frac{1}{p(\ln x-\ln p)}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\frac{1}{p(\ln x-\ln p)^2}\right]+O\left(\sum_{p\le\sqrt x}\frac{x^{k+1}}{p\ln^3 x}\right)+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right)\\&=2\sum_{p\le\sqrt x}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\frac{1}{\ln x\,p\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right)}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}\frac{1}{p\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right)^2}\right]+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right),\end{aligned}\tag{6}$$

注意到当 $x<1$ 时，有 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m+\cdots$，则由(6)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{pq\le x}p^kq^k&=\frac{2x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\sum_{p\le\sqrt x}\frac1p\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^m p}{\ln^m x}+\cdots\right)+\frac{2x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}\cdot\\&\quad\sum_{p\le\sqrt x}\frac1p\left(1+\frac{2\ln p}{\ln x}+\cdots+m\frac{\ln^{m-1}p}{\ln^{m-1}x}+\cdots\right)+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right),\end{aligned}\tag{7}$$

当 $m\ge2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{p\le\sqrt x}\frac{\ln^m p}{p}&=\int_2^{\sqrt x}\frac{\ln^m y}{y}d\pi(y)=\frac{\ln^m\sqrt x}{\sqrt x}\pi(\sqrt x)+O(1)-\int_2^{\sqrt x}\pi(y)\frac{m\ln^{m-1}y-\ln^m y}{y^2}dy\\&=\frac{\ln^m\sqrt x}{\sqrt x}\left(\frac{\sqrt x}{\ln\sqrt x}+O\left(\frac{\sqrt x}{\ln^2\sqrt x}\right)\right)-\int_2^{\sqrt x}\left(\frac{y}{\ln y}+\frac{y}{\ln^2 y}+O\left(\frac{y}{\ln^3 y}\right)\right)\frac{m\ln^{m-1}y-\ln^m y}{y^2}dy\\&=\frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}}\right)+\int_2^{\sqrt x}\left[\frac{\ln^{m-1}y}{y}-(m-1)\frac{\ln^{m-2}y}{y}+O\left((1-m)\frac{\ln^{m-3}y}{y}\right)\right]dy\\&=\frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}}\right)+\frac{\ln^m x}{m2^m}-\frac{\ln^{m-1}x}{2^{m-1}}+O\left(\frac{(1-m)\ln^{m-2}x}{(m-2)2^{m-2}}\right)=\frac{\ln^m x}{m2^m}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{2^{m-2}(2-m)}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

注意到 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m2^m}$ 收敛，从(8)式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{p\le\sqrt x}\frac1p\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2p}{\ln^2x}+\cdots+\frac{\ln^mp}{\ln^mx}+\cdots\right)=\ln\ln x+\\&(C-\ln\ln2)+O\left(\frac1{\ln x}\right)+\frac{1}{\ln x}\left(\frac12\ln x+O(1)\right)+\cdots\\&+\frac{1}{\ln^m x}\cdot\left(\frac{\ln^m x}{m2^m}+O\left(\frac{\ln^{m-2}x}{(2-m)2^{m-2}}\right)\right)+\cdots\\&=\ln\ln x+C_1+\left(\frac12+\cdots+\frac1{m2^m}+\cdots\right)+O\left(\frac1{\ln x}\right)\\&=\ln\ln x+B_1+O\left(\frac1{\ln x}\right),\end{aligned}\tag{9}$$

应用同样的方法可得

$$\sum_{p\le\sqrt x}\frac1p\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2p}{\ln^2x}+\cdots+(m+1)\frac{\ln^mp}{\ln^mx}+\cdots\right)=\ln\ln x+B_2+O\left(\frac1{\ln x}\right),\tag{10}$$

其中我们用到估计式 $\sum_{p\le x}\frac1p=\ln\ln x+C+O\left(\frac1{\ln x}\right)$ 和 $\sum_{p\le\sqrt x}\frac{\ln p}{p}=\frac12\ln x+O(1)$，

从(7)(9)(10)式容易得到

$$\sum_{pq\leqslant x}p^kq^k=\frac{2x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\left(\ln\ln x+B_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+\frac{2x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2x}\left(\ln\ln x+B_2+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2x}\right)$$

$$=\frac{2x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\ln\ln x+B_3\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{2x^{(k+1)}}{(k+1)^2\ln^2x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2x}\right)\qquad(11)$$

于是完成了引理2的证明。

2　定理的证明

本节来完成2个定理的证明。由引理1,引理2中(1)(2)(3)式,$n\in A$ 时 n 的四种情形及 $p_d(n)$ 的定义知

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}K(p_d(n))=\sum_{p\leqslant x}K(p)+\sum_{p^2\leqslant x}K(p^3)+\sum_{p^3\leqslant x}K(p^6)+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}K((pq)^2)$$

$$=\sum_{p\leqslant x}\frac{p(p+3)}{2}+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{p^3(p^3+3)}{2}+\sum_{p^3\leqslant x}\frac{p^6(p^6+3)}{2}+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}\frac{p^2q^2(p^2q^2+3)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{p\leqslant x}p^2+\sum_{p^2\leqslant x}p^6+\sum_{p^3\leqslant x}p^{12}+\sum_{pq\leqslant x}p^4q^4-\sum_{p^2\leqslant x}p^8\right]+\frac{3}{2}\left[\sum_{p\leqslant x}p+\sum_{p^2\leqslant x}p^3+\sum_{p^3\leqslant x}p^6+\sum_{pq\leqslant x}p^2q^2-\sum_{p^2\leqslant x}p^4\right]$$

$$=\frac{x^5}{5\ln x}\ln\ln x+A_1\frac{x^5}{\ln x}+\frac{x^5}{25\ln^2x}\ln\ln x-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{9\ln x}+O\left(\frac{x^5}{\ln^2x}\right).$$

这就完成了定理1的证明。用同样的办法可以证明定理2。由 $q_d(n)$ 的值我们有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}K(q_d(n))=\sum_{p\leqslant x}K(1)+\sum_{p^2\leqslant x}K(p)+\sum_{p^3\leqslant x}K(p^3)+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}K(pq)$$

$$=\sum_{p\leqslant x}2+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{p(p+3)}{2}+\sum_{p^3\leqslant x}\frac{p^3(p^3+3)}{2}+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}\frac{pq(pq+3)}{2}$$

$$=\sum_{p\leqslant x}2+\frac{1}{2}\left[\sum_{p^2\leqslant x}p^2+\sum_{p^3\leqslant x}p^6+\sum_{pq\leqslant x}p^2q^2-\sum_{p^2\leqslant x}p^4\right]+\frac{3}{2}\left[\sum_{p^2\leqslant x}p+\sum_{p^3\leqslant x}p^3+\sum_{pq\leqslant x}pq-\sum_{p^2\leqslant x}p^2\right]$$

$$=\frac{x^3}{3\ln x}\ln\ln x+A_2\frac{x^3}{\ln x}+\frac{x^3}{9\ln^2x}\ln\ln x-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\ln x}+\frac{3x^2}{2\ln x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^3}{\ln^2x}\right).$$

这就完成了定理2的证明。

参考文献:

[1] Vyawahare A W. Near pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal,2004(14):42-61.

[2] Smarandache F. Only problems,not solutions [M]. Chicaga: Xiquan Publishing House,1993.

[3] 刘红艳. 关于简单数序列的均值性质 [J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2004,24(1):28-30.

[4] 朱敏慧. 一个新的算术函数和它的渐近公式 [J]. 纺织高校基础科学学报,2007,20(4):357-360.

[5] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spinger-Verlag,1976.

[责任编辑　贺小林]

Two Arithmetical Functions Involving Near Pseudo Smarandache Notions and Their Asymptotic Formulas

GAO LI,XIE RUI,ZHAO QIN

(College of Mathematics and Computer Science,Yan an University,Yan an 716000,China)

Abstract: By using elementary method,the article will study the mean value properties of function of functions involving near pseudo smarandache notions and two special arithmetical functions on simple numbers respectively, a series of regular results are obtained.

Key words: near pseudo Smarandache notions; simple numbers; function of functions; asymptotic formula