DOI :10.13482/j.issn1001-7011.2008.04.008
第25卷 第4期 黑龙江大学自然科学学报 Vol.25 No.4
2008年8月 JOURNAL OF NATURAL SCIENCE OF HEILONGJIANG UNIVERSITY August, 2008

# 两个数论函数的混合均值公式

贺艳峰[1,2]
（1.西北大学 数学系，西安 710127；2.延安大学 计算机学院，延安 716000）

摘　要：对任意正整数 $n$，Smarandache函数 $V(n)$ 定义为：$V(1)=U(1)=1$；$n>1$时，令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 $n$ 的标准分解式，则 $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$；$U(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$。利用素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann zeta-函数 $\zeta(s)$ 的解析性质，通过分区间讨论的方法研究了两个Smarandache函数 $U(n)$ 与 $V(n)$ 的混合均值，并给出了它的一个渐近公式。

关键词：Smarandache函数；Abel恒等式；Riemann zeta-函数
中图分类号：O156.4　　文献标志码：A　　文章编号：1001-7011(2008)04-0477-03

## 1 引言及结论

对任意正整数 $n$，在[1]中Smarandache函数 $V(n)$ 定义为：$V(1)=U(1)=1$；$n>1$时，令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 $n$ 的标准分解式，则 $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$；$U(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$。关于函数 $V(n)$ 和 $U(n)$，有些学者进行了研究，获得了一些较好的结果。例如，沈虹[2]研究了 $V(n)$ 与 $p(n)$ 差的平方均值分布性质，并得到了一个渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $p(n)$ 是 $n$ 的最小素因子。徐哲峰[3]研究了 $U(n)$ 的均值分布性质，并得到了一个渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}(U(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann-zeta函数。Chen jianbin[4]还利用初等方法证明了，对任意的正整数 $n$，

$$\sum_{d\mid n}U(d)=n$$

有且只有两个解，即 $n=1,28$。

本文利用初等的方法研究了 $V(n)$ 与 $U(n)$ 的一个混合均值分布，并给出了一个渐近公式，即：

定理

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)U(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $a_i=(i-1)!$ 为可计算的常数。

## 2 三个简单引理

为了完成定理的证明，需要下面这三个简单引理：

**引理1** 设 $x>1$ 是实数，则有：

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right).$$

收稿日期：2007-11-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671155）
作者简介：贺艳峰（1976-），女，讲师，硕士研究生，主要研究方向：基础数论，E-mail: ydheyanfeng@163.com

其中 $a_i=(i-1)!$.

证明 参阅文献[5]的 3.1中的定理 3.2.

引理 2 设 $p$是素数,则有:

$$\sum_{p\leqslant x}p^2=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

证明 由引理 1及[6]中 Abel恒等式得:

$$\sum_{p\leqslant x}p^2=x^2\pi(x)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\pi(y)\,dy=x^2\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)dy$$

$$=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}-\frac{2}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了引理 2的证明。

引理 3 设 $r\geqslant 2$是任意正整数,且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是 $n$的标准分解式,则有:

$$U(n)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\};\quad V(n)\leqslant\sqrt[r]{n}.$$

证明 令 $x=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}$.则 $x\leqslant\sqrt[r]{n}$,注意到 $U(n)$和 $V(n)$的定义,有 $1\leqslant s,t\leqslant r$使得 $x=p_s^{\alpha_s}$; $U(n)=\alpha_t p_t$从而

$$V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}\leqslant\alpha_s p_s\leqslant p_s^{\alpha_s}=x;$$

$$U(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}=\alpha_t p_t\leqslant p_t^{\alpha_t}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}.$$

于是完成了引理 3的证明。

## 3 定理的证明

下面来证明定理。对任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是 $n$的标准分解式。把区间 $[1,x]$的所有正整数 $n$分成如下两部分:

A: $\omega(n)=1$,即就是所有 $n=p^\alpha\leqslant x$的正整数,其中 $p$是素数,$\alpha$是任意正整数;

B: $\omega(n)\geqslant 2$,其中 $\omega(n)$表示 $n$的不同素因子的个数。

下面逐一进行计算:

(i)当 $n\in A$时,此时可设 $n=p^\alpha$,则有 $U(n)=V(n)=\alpha\cdot p$,从而由引理 1及引理 2得

$$\sum_{n\in A}V(n)U(n)=\sum_{n\in A}\alpha^2\cdot p^2=\sum_{p\leqslant x}p^2+\sum_{\substack{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x\\ p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha^2p^2=M_1+M_2.\quad(1)$$

由引理 2及 Abel恒等式得

$$M_1=\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).\quad(2)$$

和

$$M_2=\sum_{\substack{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x\\ p\leqslant\sqrt[\alpha]{x}}}\alpha^2\cdot p^2\leqslant\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\alpha^2\cdot p^2\ll\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha^2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x.\quad(3)$$

把(2)式和(3)式代入(1)式,得

$$\sum_{n\in A}V(n)U(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

(ii)当 $n\in B$时,此时可设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, $r\geqslant 2$且令 $V(n)=\alpha_1\cdot p_1$, $U(n)=\alpha_2 p_2$,注意到 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\geqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\geqslant\alpha_1\cdot p_1\alpha_2 p_2$,由引理 3知

$$\sum_{n\in B}V(n)U(n)=\sum_{n\in B}\alpha_1\alpha_2p_1p_2=\sum_{\substack{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\leqslant x\\ p_1^{\alpha_1}\leqslant\sqrt{n}}}\alpha_1\alpha_2p_1p_2\sum_{p_1^{\alpha_1}\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p_2^{\alpha_2}\leqslant\frac{x}{p_1^{\alpha_1}}}x\leqslant\sum_{p_1^{\alpha_1}\leqslant\sqrt{x}}x^2\leqslant\frac{x^{2+\frac{1}{r}}}{\ln x}\ll\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}$$

综合以上(i)和(ii)得:

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)U(n)=1+\sum_{n\in A}V(n)U(n)+\sum_{n\in B}V(n)U(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了定理的证明。

## 参考文献

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] 沈虹.一个新的数论函数及其它的均值分布性质[J].纯粹数学与应用数学学报, 2007, 23(2): 235—238.
[3] 徐哲峰. Smarandache函数的均值分布性质[J].数学学报, 2006, 49(5): 1009—1012.
[4] Chen Jianbin. Value distribution of the F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 60—65.
[5] 潘承洞,潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海:上海科学技术出版社.
[6] Tom M A. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer—Verlag, 1976.

## One hybrid mean value formula involving two Smarandache functions

He Yanfeng[1,2]
(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: For any positive integer $n$, define $V(1)=U(1)=1$, and $V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1, \alpha_2\cdot p_2, \cdots, \alpha_r\cdot p_r\}$ and $U(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1\cdot p_1, \alpha_2\cdot p_2, \cdots, \alpha_r\cdot p_r\}$ if $n>1$, where $\alpha_1, p_1, \alpha_2, p_2, \cdots, \alpha_r, p_r$ satisfy $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ which decomposes n into prime powers. Based on the analytic properties of the prime function $\pi(x)$ and Riemann zeta—function $\zeta(s)$, the hybrid mean value involving two Smarandache functions is studied by using an interval halving method, and further an asymptotic formula is given.
Key words: Smarandache function; Abel identity; Riemann zeta—function

(上接第 476页)

## Initial boundary value problem of semilinear parabolic equation with critical initial data

Zhang Wenying
(School of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: The initial boundary value problem of semilinear parabolic equation $u_t-\Delta u=f(u)$ with critical initial data $J(u_0)=d$, $I(u_0)<0$ is considered. By using the theory of potential wells, it is shown that if $f(u)$ satisfies assumption $(H)$, $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$, $J(u_0)=d$ and $I(u_0)<0$, then the problem does not admit any global solution. So this open problem is resolved and the existing results are supplemented in essential.
Key words: semilinear parabolic equations; initial boundary value; critical initial data; potential wells; global non-existence