DOI:10.16039/j.cnki.cn22-1249.2004.04.034

第21卷 第4期　　吉林化工学院学报　　Vol.21 No.4
2004年12月　　JOURNAL OF JILIN INSTITUTE OF CHEMICAL TECHNOLOGY　　Dec. 2004

文章编号:1007-2853(2004)04-0096-01

两个有关伪Smarandache函数的方程

乐茂华[1,2]

(1.湛江师范学院 数学系,广东 湛江 524048;2.梧州师范高等专科学校 数学系,广西 贺州 542800)

摘要:对于正整数 n,设 $Z(n)$、$f(n)$、$g(n)$ 分别是 n 的伪Smarandache函数、约数和函数、除数函数.本文解决了方程 $Z(n)=f(n)$ 和 $Z(n)=g(n)$ 的求解问题.

关 键 词:伪Smarandache函数;约数和函数;除数函数;方程;

中图分类号:O 156　　　文献标识码:A

设 $\mathbf{N}$ 是全体正整数的集合.对于正整数 n,设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 分别是约数和函数和除数函数.这是两类经典的数论函数(参见文献[1]).1980年,Smarandache[2] 引入了一类新的数论函数,称为Smarandache函数.此后,Kashihara[3] 进一步提出了伪Smarandache函数 $Z(n)$,它等于满足

$$\frac{1}{2}m(m+1)\equiv 0(\bmod n) \tag{1}$$

的最小正整数 m.最近,Ashbacher[4] 对于上述数论函数提出了以下两个问题.

问题1　方程　$Z(n)=f(n),\ n\in\mathbf{N}$　(2)
是否存在无穷多个适合 $n\neq 2^r(r\geqslant 0)$ 的解 n?

问题2　方程　$Z(n)=g(n),\ n\in\mathbf{N}$　(3)
有哪些解 n?

本文完整地解决了上述问题,即证明了:

定理1　方程(2)仅有解 $n=2^r$,其中 r 是非负整数.

定理2　方程(3)仅有解 $n=1,3,10$.

定理1的证明　设 n 是方程(2)适合 $n\neq 2^r(r\geqslant 0)$ 的解.此时显然有 $n>1$.因为 $n\neq 2^r$,故从文献[5]可知

$$Z(n)<n \tag{4}$$

又因 $n>1$,故从 $f(n)$ 的定义可知

$$f(n)\geqslant n+1>n \tag{5}$$

结合(4)和(5)可知此时(2)不成立,所以(2)仅有解 $n=2^r(r\geqslant 0)$.定理证完.

定理2的证明　从文献[4]可知:方程(3)仅有解 $n=1,3,10$ 适合 $n\leqslant 10\,000$.设 n 是适合 $n\neq 1,3$ 或 10 的解.此时显然有 $n>10\,000$.设

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s} \tag{6}$$

是 n 的标准分解式.除数函数 $g(n)$ 的定义,从(6)可知

$$g(n)=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_s+1) \tag{7}$$

同时,从伪Smarandache函数 $Z(n)$ 的定义可知

$$\frac{1}{2}Z(n)(Z(n)+1)\equiv 0(\bmod\ n) \tag{8}$$

从(8)可得

$$Z(n)\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{8n+1}>1.414\sqrt{n} \tag{9}$$

结合(3),(7)和(9)可得

$$1.414\frac{p_1^{a_1}}{a_1+1}\circ\frac{p_2^{a_2}}{a_2+1}\cdots\frac{p_s^{a_s}}{a_s+1}<1 \tag{10}$$

对于素数 p 以及正整数 a,

$$\frac{p^a}{a+1}\geqslant\begin{cases}1, & \text{当 } p=2 \text{ 且 } a>6 \text{ 或 } p=3 \text{ 且 } a>1 \text{ 时;}\\ \frac{\sqrt{5}}{2}, & \text{当 } p>3 \text{ 时.}\end{cases} \tag{11}$$

因此,从(11)可知:当 $n>10\,000$ 时,(10)不可能成立.由此可知方程(3)仅有解(下转第104页)

收稿日期:2004-03-02
基金项目:国家自然科学基金项目(NO.10271104);广东省自然科学基金项目(NO.011781);广东省教育厅自然科学研究项目(NO.0161);湛江市988科技兴湛计划项目.
作者简介:乐茂华(1952-),男,上海市人,湛江师范学院教授,主要从事数论方面的研究.

(4): 200—204.

[2] Xin-yi Wang. Exact soliton solutions for a class of coupled field equations[J]. Physics Letters A, 1993, (1): 30—32.

[3] DongBo Cao. New exact solutions for a class of nonlinear coupled differential equations[J]. Physics Letters A, 2002, (1): 27—33.

[4] 张鸿庆. 非线性发展方程的显性精确解[J]. 应用数学, 1999, (1): 76—78.

Trigonometric function solutions for nonlinear couple differential equation

TIAN Qiu-ye[1], SHAO Quan[2], WANG Gang[1]

(1. School of Science, Beijing City University, Beijing 100083, China; 2. School of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China)

Abstract: There is not only plenty of construction of solutions but also a lot of physical significance for nonlinear couple differential equations. Some improved ways to the trigonometric function solutions that Cao made are discussed and improved, and some conditions of solutions with parameters restricted are supplemented, gaining some valuable results.

Key words: nonlinear couple differential equations; trigonometric function solutions; parameters

(上接第96页)

$n=1, 3, 10$. 定理证完.

参考文献:

[1] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1979.

[2] Smarandache F. A function in the number theory[J]. Ann Timisoara Univ Ser Math, 1980, 28(1): 79—88.

[3] Kashihara K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. Vail: Erhus Univ Press, 1996.

[4] Ashbacher C. The pseudo Smarandache function and the classical funtions of number theory[J]. Smarandache Notions J, 1998, (9): 78—81.

[5] Ibstedt H. On the pseudo Smarandache function and iteration problems [J]. Smarandache Notions J, 2001, (12): 36—43.

Two equations concerning pseudo Smarandache function

LE Mao-hua[1,2]

(1. Dept. of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang 524048, China; 2. Dept. of Mathmatics, Wuzhou Normal College, Hezhou 542800, China)

Abstract: For any positive integer n, let $Z(n)$, $f(n)$, $g(n)$ denote the pseudo Smarandache function, the sum of distinct divisors and the divisor function of n respectively. Two equations concerning $Z(n)$, $f(n)$, $g(n)$ are solved.

Key words: pseudo Smarandache function; sum of distinct divisors; divisor function; equation