第33卷 第10期
2015年10月

河南科学
HENAN SCIENCE

Vol.33 No.10
Oct. 2015

文章编号：1004-3918(2015)10-1682-04

伪Smarandache函数的混合均值

王曦浛， 高 丽， 鲁伟阳

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要：对任意的正整数n，伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m(m+1)/2$,，即$Z(n)=\min\{m: n|m(m+1)/2, m\in N\}$. 而数论函数$D(n)$定义为最小的正整数$m$使得$n|d(1)d(2)d(3)\cdots d(m)$，其中$d(n)$为Dirichlet除数函数，即$D(n)=\min\left\{m: m\in N, n\left|\prod_{i=1}^{m} d(i)\right.\right\}$. 利用初等方法和解析方法研究了伪Smarandache函数$Z(n)$与数论函数$D(n)$的混合函数$Z(n)\cdot\ln(D(n))$的均值问题，并得到一个较强的渐近公式.

关键词：伪Smarandache函数；数论函数；混合均值

中图分类号：O 156.4 **文献标识码**：A

The Hybrid Mean Value of the Pseudo-Smarandache Function

Wang Xihan， Gao Li， Lu Weiyang

（College of Mathematics and Computer Science，Yanan University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract: For any positive integer n, the Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m(m+1)/2$, that is, $Z(n)=\min\{m: n|m(m+1)/2, m\in N\}$. And the number theory function $D(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that n divide product $d(1)d(2)d(3)\cdots d(m)$, where $d(n)$ is the Dirichlet divisor function, that is, $D(n)=\min\left\{m: m\in N, n\left|\prod_{i=1}^{m} d(i)\right.\right\}$. The main purpose of this paper is to use the elementary method and analytic method to study the hybrid mean value problem of $Z(n)\cdot\ln(D(n))$ invoving the Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ and the number theory function $D(n)$, and to give a shaper asymptotic formula.

Key words: Pseudo-Smarandache function; number theory function; hybrid mean value

1 预备知识及结论

对任意的正整数n，伪Smarandache函数$Z(n)$[1]定义为最小的正整数m使得$n|m(m+1)/2$，即$Z(n)=\min\{m: n|m(m+1)/2, m\in N\}$. 有关函数$Z(n)$的问题，已取得不少研究成果[1-6]. 例如：文献[2]研究了伪Smarandache函数的一个混合均值问题，并给出了渐近公式

$$\sum_{n\le x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right). \qquad (1)$$

文献[3]研究了Smarandache双阶乘函数$Sdf(n)$与伪Smarandache函数$Z(n)$的复合函数$Sdf(Z(n))$的均值，即证明了

收稿日期：2015-06-05

基金项目：陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019)；延安大学校级科研计划项目—引导项目(YD2014-05)；延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介：王曦浛(1990-)，女，硕士研究生，主要研究方向为数论.

$$\sum_{n\le x} Sdf\left(Z(n)\right)=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{2}$$

其中：$a_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数．

文献[4]研究了伪Smarandache函数$Z(n)$与算数函数$\overline{\Omega}(n)$的混合均值，并给出渐近公式

$$\sum_{n\le x} Z(n)\cdot\overline{\Omega}(n)=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{3}$$

其中：$a_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数．

文献[5]研究了伪Smarandache函数$Z(n)$与Dirichlet除数函数$d(n)$的混合均值，并给出渐近公式

$$\sum_{n\le x} Z(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{4}$$

其中：$a_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数．

对任意的正整数n，数论函数$D(n)$定义为最小的正整数m，使得$n\,|\,d(1)d(2)d(3)\cdots d(m)$，其中$d(n)$为Dirichlet除数函数，即

$$D(n)=\min\left\{m:m\in N,n\,\Big|\prod_{i=1}^{m}d(i)\right\}.$$

有关这一函数的性质研究的比较少，文献[7]研究了它的初等性质，文献[8]利用解析方法研究了这一函数的均值问题，并给出渐近公式

$$\sum_{n\le x}\ln\left(D(n)\right)=\frac{\pi^2\cdot\ln 2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{5}$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\ln\left(D(n)\right)}{n}=\frac{\pi^2\cdot\ln 2}{6}\cdot\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{6}$$

其中：c_i，$d_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数．

本文主要利用初等方法与解析方法研究伪Smarandache函数$Z(n)$与数论函数$D(n)$的混合函数$Z(n)\cdot\ln(D(n))$的均值问题，并得到一个较强的渐近公式．即是

定理1　设$k>1$是给定的正整数，则对于任意的实数$x>1$，我们有渐近式

$$\sum_{n\le x} Z(n)\cdot\ln\left(D(n)\right)=\frac{\zeta(3)\cdot\ln 2}{3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{7}$$

其中：$a_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数．

2　相关引理

引理1[7]　数论函数$D(n)$是一个Smarandache可乘函数，即是当$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式时，

$$D(n)=\max\left\{D\left(p_1^{\alpha_1}\right),D\left(p_2^{\alpha_2}\right),\cdots,D\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right\}.$$

引理2[9-10]　对任意的正整数n和k，有$1\le Z(n)\le 2n-1$，当$n=2^k$时，$Z(n)=2n-1$；当$n=p^k$时，$Z(n)=n-1$，其中p为奇素数；若n为任意的合数时，$Z(n)=\max\left\{Z(m):m\,|\,n\right\}$．

引理3[11]　设$x\geq 2$为实数，则有

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{8}$$

其中：$c_i(i=2,3,\cdots,k)$是常数，并且$c_i=1$．

引理4　设p为素数，则有渐近公式

$$\sum_{n<p\leqslant \frac{x}{n}} p^2=\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^3}{n^3\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\cdot\ln^{k+1}x}\right),\tag{9}$$

$$\sum_{n<p\leqslant \frac{x}{n}} p=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^2}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1}x}\right),\tag{10}$$

其中：$b_i,c_i(i=2,3,\cdots,k)$为可计算的常数.

证明　由引理3及Abel求和公式[12]即可证得.

3　定理的证明

把区间[1，x]中的所有整数分为三个集合X，Y和Z，其中$X=\left\{n\,|\,n=2^k,k=1,2,\cdots\right\}$；集合$Y$为包含所有满足条件：存在奇素数$p$使得$p|n$的正整数$n$，并且$p$满足$p>\sqrt{n}$的奇素数$p$的集合；集合$Z$为包含区间[1，$x$]中不属于集合$X$和$Y$的正整数$n$.

对于集合X，由引理1与引理2可知：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}Z(n)\cdot\ln\left(D(n)\right)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}Z(n)\cdot\ln\left(D(2^k)\right)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}(2n-1)\cdot k\ln 2<<\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in X}}n^2<<\frac{x^2}{\ln x}.\tag{11}$$

对于集合Y，由引理1知

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in Y}}Z(n)\cdot\ln\left(D(n)\right)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p>\sqrt{n}}}Z(n)\cdot\ln\left(D(n)\right)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z(np)\cdot\ln\left(D(p)\right)=\\&\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z(p)\cdot\ln\left(2^{p-1}\right)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(p-1)\cdot\ln\left(2^{p-1}\right)=\ln 2\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<\frac{x}{n}}(p-1)^2=\\&\ln 2\cdot\left(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2-2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}1\right).\end{aligned}\tag{12}$$

由式(9)、(10)可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^3}{n^3\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\cdot\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}+\\&\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^3}{n^3\cdot\ln^i x}\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^3}{n^3\cdot\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{13}$$

其中：$a_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数；

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^2}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}+\\&\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(\ln^i n)\cdot x^2}{n^2\cdot\ln^i x}\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{\zeta(2)}{2}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{14}$$

其中：$d_i(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数；

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}1=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{x}{n}=x\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n}=x\cdot\left(\ln\sqrt{x}+c+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)<x^{\frac{3}{2}}.\tag{15}$$

联立式(12)~(15)可得

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Y}} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) = \frac{\zeta(3) \cdot \ln 2}{3} \cdot \frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i \cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right), \tag{16}$$

其中：a_i（i=1，2，…，k）为可计算的常数．

对于集合Z，由伪Smarandache函数$Z(n)$的性质可知，若n的标准分解式为$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$，其中$n$为集合$Z$中任意的正整数，则有两种可能：$Z(n) = Z(p_r) = p_r - 1 \leqslant \sqrt{n}$ 或 $Z(n) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \left\{ Z\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\} = p_i^{\alpha_i} - 1 < p_i^{\alpha_i}$，其中$\alpha_i \geqslant 2$．结合引理1可知

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Z}} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) &= \sum_{\substack{np \leqslant x \\ p \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} \ln\left(D(np)\right) \sqrt{np} + \sum_{\substack{np^\alpha \leqslant x, \alpha \geqslant 2 \\ p^\alpha \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} (\alpha + 1) \cdot p^\alpha \cdot \ln\left(D(np)\right) << \\ &\sum_{np \leqslant x} \ln\left(D(n)\right) \cdot \sqrt{n} \ln n << x^{\frac{5}{2}} \ln x. \end{aligned} \tag{17}$$

结合式(11)，(16)，(17)可得，

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) &= \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in X}} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Y}} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in Z}} Z(n) \cdot \ln\left(D(n)\right) = \\ &\frac{\zeta(3) \cdot \ln 2}{3} \cdot \frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i \cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right), \end{aligned}$$

其中：a_i（i=1，2，…，k）为可计算的常数．证毕．

参考文献：

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. USA：Erhus University Press，1996.

[2] Cheng Lin. On the mean value of the pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna，2007，3(3)：97-100.

[3] 鲁伟阳，高　丽，郝虹斐. 关于Smarandache双阶乘函数与伪Smarandache函数的混合均值[J]. 江西科学，2014，32(2)：189-191，251.

[4] 王曦浛，高　丽，鲁伟阳. 关于伪Smarandache函数的一个混合均值[J]. 海南大学学报：自然科学版，2015，33(2)：97-99.

[5] 郝虹斐，高　丽，鲁伟阳. 关于伪Smarandache函数与除数函数的混合均值[J]. 延安大学学报：自然科学版，2015，34(2)：46-48.

[6] 高　丽，鲁伟阳，郝虹斐. 一类包含伪Smarandache函数与Euler函数的方程[J]. 河南科学，2013，31(10)：1597-1599.

[7] Li Ling. An new Smarandache multiplicative function and its arithmetical properties，research on number theory and Smarandache notions(collected papers)[M]. USA：Hexis，2009.

[8] Shang Songye，Chen Guohui. An new Smarandache multiplicative function and its mean value formula，research on number theory and Smarandache notions(collected papers)[M]. USA：Hexis，2009.

[9] 马　荣. Smarandache函数及其相关问题研究[M]. USA：The Educational Publisher，2012.

[10] Pinch R. Some properties of the Pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna，2005，1(2)：167-172.

[11] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.

[12] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Spring-Verlag，1976.

（编辑　张继学）