引用格式:Wang Xihan,Gao Li,Li Guorong,*et al*. Two Equation of Fake Smarandache Square-free Factor Function and Euler Function[J]. Journal of Gansu Sciences,2016,28(5):23-25.[王曦浛,高丽,李国蓉,等. 伪 Smarandache 无平方因子函数与 Euler 函数的两个方程[J]. 甘肃科学学报,2016,28(5):23-25.]
doi:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2016.05.006.

伪 Smarandache 无平方因子函数与 Euler 函数的两个方程

王曦浛,高 丽,李国蓉,薛 阳

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要 对任意的正整数 n,著名的伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m^n$,利用初等方法以及伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 和 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的性质,研究了方程 $Z_w(\varphi(n))=\varphi(Z_w(n))$ 的可解性,证明了该方程有无穷多个正整数解。同时讨论了方程 $Z_w(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性,并求出了该方程的正整数解为 $n=1$。

关键词 伪 Smarandache 无平方因子函数;Euler 函数;正整数解

中图分类号:O156.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1004-0366(2016)05-0023-03

对任意的正整数 n,著名的伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$[1] 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m^n$,即 $Z_w(n)=\min\{m: n \mid m^n, m\in N\}$。这个 $Z_w(n)$ 函数是由美籍罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授在他所著的《Only Problems,Not Solutions!》一书中提出来的,并建议人们研究其性质。而 Euler 函数 $\varphi(n)$ 定义为不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数。对于这两个函数许多学者对其进行了研究,并得出了有意义的结论[2-7],如文献[2]中研究了方程 $Z_w(Z(n))-Z(Z_w(n))=0$ 的可解性,并证明了该方程有无穷多个正整数解,文献[3]中研究了方程 $Z_w(n)=\varphi(n)$ 与 $Z_w(n)+S(n)=2n$ 的可解性问题,文献[4]中讨论了 $S_k(n)=\varphi(n)$ 的可解性,并给出该方程的所有正整数解,文献[5]中讨论了两个数论函数方程 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 与 $Z(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性问题,并给出所有的正整数解,文献[6]中讨论了关于 Smarandache 函数和 Euler 函数的三个方程的可解性问题并求出所有正整数解。

我们利用初等方法研究了方程 $Z_w(\varphi(n))=\varphi(Z_w(n))$ 与 $Z_w(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性问题,并给出方程所有的正整数解。

1 相关引理

引理 1 对于素数 p 与 $\alpha\geqslant 1$,有 $\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$[8]。

引理 2 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则有 $\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$[8]。

引理 3 设 n 是任意的正整数,有 $Z_w(n)\leqslant n$,特别当 n 是无平方因子数时,则 $Z_w(n)=n$[9]。

引理 4 如果 p 为素数且 $k\geqslant 1$,则 $Z_w(p^k)=p$[9]。

引理 5 设 n 是任意的正整数,$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则 $Z_w(n)=p_1p_2\cdots p_k$[10]。

引理 6 若 $(m,n)=1$,则 $Z_w(m,n)=Z_w(m)\cdot Z_w(n)$[9]。

收稿日期:2016-04-13;**修回日期**:2016-05-26.
基金项目:陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目-引导项目(YD2014-05);延安大学研究生教育创新计划项目.
作者简介:王曦浛(1990-),女,陕西乾县人,硕士研究生,研究方向为数论. **E-mail**:648034259@qq.com.
通讯作者:高丽. **E-mail**:yadxgl@163.com.

2 主要结论及其证明

定理1 对任意的正整数 n,方程

$$Z_w(\varphi(n)) = \varphi(Z_w(n)) \tag{1}$$

有无穷多个正整数解。

证明 (1) 显然当 $n=1$ 时,$Z_w(\varphi(1))=1$,$\varphi(Z_w(1))=1$,故方程(1)成立。

(2) 当 $n=p$ 时,由引理1和引理4可知:$Z_w(\varphi(p))=Z_w(p-1)$,$\varphi(Z_w(p))=\varphi(p)=p-1$。若方程(1)成立,则 $Z_w(p-1)=p-1$。显然当 $p-1$ 为无平方因子数时,$Z_w(p-1)=p-1$ 成立,所以当 $n=p$ 且 $p-1$ 为无平方因子数即为方程(1)的解。

(3) 当 $n=p^\alpha$ 时,由引理1和引理4可知,$Z_w(\varphi(p^\alpha))=Z_w(p^{\alpha-1}(p-1))$,$\varphi(Z_w(p^\alpha))=\varphi(p)=p-1$。此处对 p 分两种情况讨论:

(ⅰ) 当 p 是奇素数时,$\alpha\geqslant 2$,$\because (p^{\alpha-1},p-1)=1$。由引理6可知:$Z_w(\varphi(p^\alpha))=Z_w(p^{\alpha-1}(p-1))=Z_w(p^{\alpha-1})\cdot Z_w(p-1)=p\cdot Z_w(p-1)$。若方程(1)成立,则 $p\cdot Z_w(p-1)=p-1$,即 $Z_w(p-1)=1-\dfrac{1}{p}$,经检验方程(1)无解。

(ⅱ) 当 $p=2$ 时,有 $Z_w(\varphi(2^\alpha))=Z_w(2^{\alpha-1})$,$\varphi(Z_w(2^\alpha))=\varphi(2)=1$。若方程(1)成立,则 $Z_w(2^{\alpha-1})=1$,即 $\alpha=1$。故当 $\alpha=1$,$p=2$,$n=2$,方程(1)成立。

(4) 当 $n>1$,且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准素因子分解式时,由引理2可知:

$$Z_w(\varphi(n))=Z_w(\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}))=Z_w(p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))。$$

由引理5可知:

$$\varphi(Z_w(n))=\varphi(Z_w(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}))=\varphi(p_1p_2\cdots p_s)=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1),$$

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 全都为1时,显然有

$$Z_w(\varphi(n))=Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))。$$

若式(1)成立,则

$$Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1),$$

结论与引理3矛盾,因此方程(1)无解。

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 不全为1时,又可以分两种情况讨论:

(ⅰ) 当 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 全为奇素数时,由引理2和引理6可知:

$$\begin{aligned}Z_w(\varphi(n))&=Z_w(\varphi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}))=\\&Z_w(p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))=\\&Z_w(p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1})\cdot\\&Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))=\\&p_1p_2\cdots p_s\cdot Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))。\end{aligned}$$

由引理5可知:

$$\varphi(Z_w(n))=\varphi(p_1p_2\cdots p_s)=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)。$$

若方程(1)成立,则

$$p_1p_2\cdots p_s\cdot Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1),$$

化简得

$$Z_w((p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1))=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right),$$

结论与引理3矛盾,则方程(1)无解。

(ⅱ) 当 $n=2^\alpha p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时,现假设 $Z_w(\varphi(n))=\varphi(Z_w(n))$,可以得到以下结果:

$$Z_w(2^{\alpha-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_2-1)\cdots(p_s-1))=\varphi(2p_2\cdots p_s),$$

即

$$Z_w(p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1})\cdot Z_w(2^{\alpha-1}(p_2-1)\cdots(p_s-1))=(p_2-1)\cdots(p_s-1),$$

进一步化简为

$$Z_w(2^{\alpha-1}(p_2-1)\cdots(p_s-1))=\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right),$$

结论与引理3矛盾,则方程(1)无解。

综上所述,得到方程(1)有无穷多个正整数解。

定理2 对任意的正整数 n,方程

$$Z_w(n)+\varphi(n)=2n \tag{2}$$

仅有正整数解 $n=1$。

证明 (1) 当 $n=1$ 时,由函数 $Z_w(n)$、$\varphi(n)$ 的定义,有 $Z_w(1)=1$、$\varphi(1)=1$,所以 $Z_w(1)+\varphi(1)=2$。

(2) 当 $n=p$ 时,由引理1和引理4可知

$$Z_w(p)=p,\varphi(p)=p-1,$$

即

$$Z_w(p)+\varphi(p)=2p-1,$$

$$\because 2p-1<2p,\therefore Z_w(p)+\varphi(p)<2p,$$

因此

$$Z_w(n)+\varphi(n)<2n。$$

(3) 当 $n = p^\alpha$ 时，由引理 1 和引理 4 可知：$Z_w(p^\alpha) = p$，$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$，则 $Z_w(p^\alpha)+\varphi(p^\alpha) = p + p^{\alpha-1}(p-1)$。此处对 p 分两种情况讨论：

(ⅰ) 当 p 是奇素数时，$\alpha \geqslant 2$ 有 $p + p^{\alpha-1}(p-1) < 2p^\alpha$，即 $Z_w(n)+\varphi(n) < 2n$。

(ⅱ) 当 $p = 2$ 时，有 $Z_w(2^\alpha) = 2$，$\varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}$，则 $Z_w(2^\alpha)+\varphi(2^\alpha) = 2+2^{\alpha-1}$，$\because 2+2^{\alpha-1} < 2\cdot 2^\alpha = 2^{\alpha+1}$，$\therefore Z_w(n)+\varphi(n) < 2n$。

(4) 当 $n > 1$，且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准素因子分解式时，则 $Z_w(n) = p_1 p_2 \cdots p_s$，$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$。

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 全都为 1 时，显然有 $p_1 p_2 \cdots p_s + (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1) < 2p_1p_2\cdots p_s$，即 $Z_w(n)+\varphi(n) < 2n$。

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 不全为 1 时，又可以分两种情况讨论：

(ⅰ) 当 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 全为奇素数时，则 $Z_w(n) = p_1p_2\cdots p_s$ 是一个奇数，而 $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$ 是一个偶数，所以 $Z_w(n)+\varphi(n)$ 为一个奇数。而方程(2) 的右端为偶数，则结论矛盾，因此式(2) 无解。

(ⅱ) 当 $n = 2^\alpha p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 时，现假设 $Z_w(n)+\varphi(n) = 2n$，可以得到以下结果：

$$2p_2\cdots p_s + 2^{\alpha-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_2-1)\cdots(p_s-1) = 2\cdot 2^\alpha p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s},$$

进一步简化可得 $p_2\cdots p_s + 2^{\alpha-2}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_s^{\alpha_s-1}(p_2-1)\cdots(p_s-1) = 2^\alpha p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$\because p_2\cdots p_s$ 为奇数，$(p_2-1)\cdots(p_s-1)$ 为偶数，而等式右端为偶数，奇数＋偶数 $\neq$ 偶数，则方程(2) 无解。

综上所述，方程(2) 仅有正整数解 $n = 1$。证毕。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 关文吉，郑亚妮. 关于伪 Smarandache 函数的一个方程[J]. 纺织高效基础科学学报，2008，21(2)：151-153.

[3] 王春萍. 与 Smarandache 函数相关的一些方程[D]. 西安：西北大学，2010.

[4] 朱敏慧. 一个包含 Euler 函数及 k 阶 Smarandache Ceil 函数的方程及其正整数解[J]. 纯粹数学与应用数学，2009，25(2)：414-416.

[5] 高丽，鲁伟阳，郝虹斐. 包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的两个方程[J]. 陕西科技大学学报，2013，31(6)：163-165.

[6] 范盼红. 关于 F. Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2012，29(5)：626-628.

[7] 祁兰，赵院娥. 关于 Smarandache Ceil 函数的一个混合均值[J]. 甘肃科学学报，2014，26(3)：12-13.

[8] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Spring-Verlag, 2012.

[9] Felice Russo. A Set of New Smarandache Functions, Sequences and Conjectures in Number Theory[M]. Lupton USA: American Research Press, 2000.

[10] Le Maohua. On the Pseudo-Smarandache Squarefree Function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1-2-3): 229-236.

Two Equation of Fake Smarandache Square-free Factor Function and Euler Function

Wang Xihan, Gao Li, Li Guorong, Xue Yang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract For any positive integer n, the famous fake Smarandache square-free factor function $Z_w(n)$ is defined as positive integer $m, n|m^n$, with primary method and fake Smarandache square-free factor function $Z_w(n)$ and Euler function $\varphi(n)$, this text studies solvability of equation $Z_w(\varphi(n)) = \varphi(Z_w(n))$, and proves that this equation has infinitely many integer solutions. Meanwhile, it discusses the solvability of $Z_w(n)+\varphi(n) = 2n$, giving its positive integer solution that $n=1$.

Key words Fake Smarandache square-free factor function; Euler function; Positive integer solution