第 35 卷 第 3 期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 3
2016 年 9 月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Sep. 2016

DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2016.03.008

伪 Smarandache 无平方因子函数与欧拉函数的混合均值

王曦浛，高 丽，李国蓉，薛 阳

(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘 要: 通过运用初等和解析的方法讨论了伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 的混合均值，并给出了一个有趣的渐近公式。

关键词: 伪 Smarandache 无平方因子函数; 欧拉函数; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1004-602X(2016)03-0008-02

1 引言及结论

对任意的正整数 n，著名的伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ [1] 被定义为能够使得 $n|m^n$ 成立的最小的正整数 m，即 $Z_w(n) = \min\{m: n|m^n, m \in \mathbf{N}\}$。目前已有不少学者对函数 $Z_w(n)$ 的初等性质进行了研究，并获得了一系列有理论价值的研究成果。例如: 文献 [2] 研究了 $Z_w(n)$ 的均值问题，并给出了较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(Z_w(n))^{\alpha} = \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right) + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)。$$

文献 [3] 研究了关于伪 Smarandache 无平方因子函数的混合均值问题，并给出了较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)Z_w(n) = \frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{1\mathrm{n}^i x} + O\left(\frac{x^3}{1\mathrm{n}^{k+1}x}\right)，$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

欧拉函数被定义为与 n 互素且不超过 n 的正整数个数。此函数的应用广泛，通常被应用到其它函数的复合运算中。当 n 是素数时，有 $\varphi(n) = n-1$；当 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 时，$\varphi(n) = \prod_{p|n}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$。特别对于素数方幂 $n=p^k, k\in\mathbf{N}$ 时，有 $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$。文献 [4] 讨论了数论函数 $U(n)$，$V(n)$ 和欧拉函数 $\varphi(n)$ 的均值分布性质，并分别给出了两个渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n^k)U(n) = \frac{x^{k+2}}{k+2}\prod_p\left(1-\frac{2}{p(p+1)}\right) + O\left(x^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right);$$

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n^k)V(n) = \frac{x^{k+2}}{k+2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^3}\right) + O\left(x^{k+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)。$$

文献 [5] 研究了 Smarandache Ceil 函数 $S_k(n)$ 与欧拉函数 $\varphi(n)$ 的均值分布性质，并给出一个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi^m(S_k(n)) = \frac{6\zeta(m+1)\zeta(k(m+1)-m)}{\pi^2(m+1)}\cdot R(m+1)x^{m+1} + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)。$$

本文主要在上述文献的基础上，利用初等和解析方法研究了伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 和欧拉函数 $\varphi(n)$ 的混合均值问题，并得到一个较强的渐近公式。

收稿日期: 2016-06-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471007); 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019); 延安大学校级科研计划项目—引导项目(YD2014-05); 延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介: 王曦浛(1990—)，女，陕西乾县人，延安大学硕士研究生。

定理： 对任意的实数 $x \geqslant 1$，$m \in \mathbf{N}$ 有

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n^m) \cdot Z_w(n) = \frac{6x^{m+1}}{\pi^2(m+1)} \prod_p \left(1 + \frac{p-3}{1+p}\right) + O\left(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 ε 是任意正实数。

2 相关引理

引理 2.1[3] 对任意素数 p 和正整数 k，有 $Z_w(p^k) = p$。

引理 2.2[7] Perron 公式：设 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$，当 $\sigma > 1$ 时绝对收敛，$|a_n| \leqslant A(n)$，其中 $A(n) > 0$ 是 n 的单调递增函数，且当 $\sigma \to 1^+$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}), \alpha > 0。$$

因此对任意函数 $b_0 \geqslant b \geqslant 1$，$T \geqslant 1$，$x = N + \frac{1}{2}$，有公式

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + \left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),$$

其中 O 常数仅依赖于 b_0。

3 定理的证明

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n^m) \cdot Z_w(n)}{n^s},$$

依据 Euler 乘积公式[8] 可得

$$f(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\varphi(p^m) Z_w(p)}{p^s} + \frac{\varphi(p^{2m}) Z_w(p^2)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{\varphi(p^{km}) Z_w(p^k)}{p^{ks}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{p^{m-1}(p-1)p}{p^s} + \frac{p^{2m-1}(p-1)p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{km-1}(p-1)p}{p^{ks}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{\frac{1}{p^{s-m}}(p-1)}{1 - \frac{1}{p^{s-m}}}\right)$$

$$= \zeta(s-m) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{s-m}} + \frac{1}{p^{s-m}}(p-1)\right)$$

$$= \frac{\zeta^2(s-m)}{\zeta(2(s-m))} \prod_p \left(1 + \frac{(p-3)}{1+p^{s-m}}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann Zeta 函数。

于是应用 Perron 公式[7]，并取 $b = m + \frac{3}{2} + \varepsilon$ 可得

$$\sum_{n \leqslant x} \varphi(n^m) \cdot Z_w(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT} f(s) \cdot \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O\left(\frac{x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T}\right)。$$

将上式中的积分限移至 $\mathrm{Re}s = m + \frac{1}{2} + \varepsilon$，此时被积函数 $\frac{\zeta^2(s-m)}{\zeta(2(s-m))} \prod_p \left(1 + \frac{(p-3)}{1+P^{s-m}}\right) \frac{x^s}{s}$ 在 $s = m+1$ 处有一阶极点，留数为

$$\frac{6x^{m+1}}{\pi^2(m+1)} \prod_p \left(1 + \frac{p-3}{1+p}\right)。$$

根据留数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{m+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT} + \int_{m+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT} + \int_{m+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT} + \int_{m+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}\right) f(s) \cdot \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s = \frac{6x^{m+1}}{\pi^2(m+1)} \prod_p \left(1 + \frac{p-3}{1+p}\right)。$$

此时取 $T = x$ 易得

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{m+\frac{3}{2}+\varepsilon+iT}^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT} f(s) \cdot \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s\right| \ll \frac{x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T} = x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{m+\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT} f(s) \cdot \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s\right| \ll \frac{x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T} = x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{m+\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon-iT} f(s) \cdot \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s\right| \ll \frac{x^{m+\frac{3}{2}+\varepsilon}}{T} = x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}。$$

综上可知 $\sum_{n \leqslant x} \varphi(n^m) \cdot Z_w(n) = \frac{6x^{m+1}}{\pi^2(m+1)} \prod_p \left(1 + \frac{p-3}{1+p}\right) + O\left(x^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$，证毕。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems，Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House，1993.

[2] Liu Huaning，Gao Jing. Mean value on the Pseudo – Smarandache Squarefree function [J]. Research on Smarandache Problems in Number Theory (Collected papers). Chicago: Xiquan Publishing House，2004: 9 – 11.

[3] 赵杏花，郭金保，穆秀梅. 关于伪 Smarandache 无平方因子函数的混合均值 [J]. 河南科学，2011，29(11): 1279 – 1281.

(下转第12页)

解[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版),2000,13(3):35-38.

[6] 冉银霞,冉延平. 不定方程组 $x^2-6y^2=1$,$y^2-Dz^2=4$[J]. 延安大学学报(自然科学版)2008,27(4):19-21.

[7] 杜先存,管训贵,杨慧章. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2014,48(3):5-8.

[8] 贺腊荣,张淑静,袁进. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$[J]. 民族大学学报(自然科学版),2012,21(1):57-58.

[9] 杜先存,管训贵,杨慧章. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2014,48(3):310-313.

[10] 王冠闽,李炳荣. 关于 Pell 方程 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版),2002,15(4):9-14.

[11] 杜先存,李玉龙. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 安徽大学学报(自然科学版),2015,39(6):19-22.

[12] 柯召,孙琦. 数论讲义(下)[M] 北京:高等教育出版社,1987:137.

[13] 过静,杜先存. 关于不定方程组 $x^2-12y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 数学的实践与认识,2015,45(9):289-293.

[责任编辑 毕 伟]

On the System Diophantine Equations $x^2-12y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$

GAO LI,LI Guo-rong

(College of Mathematics of Computer Science,Yan´an University,Yan´an 716000,China)

Abstract: By using recursive sequence and some properties of the solution to Pell equation,the following were proved: If $D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$,the system Diophantine equations $x^2-12y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$ has only trivial solution $(x,y,z)=(\pm7,\pm2,0)$.

Key words: Pell equation; Diophantine equation; common solution; recursive sequence

(上接第9页)

[4] 王荣波,冯强. 关于两个可乘数论函数的混合均值分布[J]. 河南科学,2015,33(7):1067-1071.

[5] 祁兰,赵院娥. 关于 Smarandache Ceil 函数的一个混合均值[J]. 甘肃科学学报,2014,26(3):12-13.

[6] Felice Russo. A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory [M]. Lupton USA,American Research Press,2000.

[7] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京:科学出版社,1991.

[8] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag,1976.

[责任编辑 毕 伟]

The Hybrid Mean Value of the Pseudo-Smarandache Squarefree Function and Euler Function

WANG Xi-han,GAO LI,LI Guo-rong,XUE YANG

(College of Mathematics and Computer Science,Yan´an University,Yan´an 716000,China)

Abstract: This paper was used the elementary and analytic method to study the hybrid mean value problem invoving the pseudo-Smarandache squarefree function and Euler function,and give an interesting asymptotic formula for it.

Key words: pseudo-Smarandache Squarefree function; Euler function; asymptotic formula