关于 F. Smarandache LCM函数与除数函数的一个混合均值

吕国亮[20]
(渭南师范学院数学系,陕西 渭南 321004)

摘 要: 利用初等及解析方法研究函数 $SL(n)$与 Dirichlet除数函数的加权均值问题,并获得一个有趣的渐近公式.

关 键 词: F. Smarandache LCM函数;除数函数;混合均值;渐近公式
中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1008-5513(2007)03-0315-04

1 引言及结论

对任意正整数 n,著名的 F. Smarandache LCM函数 $SL(n)$定义为最小的正整数 k使得 $n|[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$表示 $1,2,\cdots,k$的最小公倍数. 例如, $SL(n)$的前几个值是 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $SL(16)=16$, $\cdots\cdots$. 由 $SL(n)$的定义我们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是 n的标准分解式,那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_r^{\alpha_r}\}.$$

关于 $SL(n)$的初等性质,许多学者进行了研究,获得了一系列有趣的结果[2]. 例如文[2]证明了如果 n是一个素数,那么 $SL(n)=S(n)$,这里 $S(n)$是 F. Smarandache函数. 即就是, $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in \mathbf{N}\}$. 同时文[2]还提出了下面的问题:

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\neq n? \tag{2}$$

文[3]完全解决了这个问题,并证明了下面的结论:

任何满足(2)式的整数可表示为 $n=12$或者 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_r,p$是不同的素数且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是满足 $p>p_i^{\alpha_i}$, $i=1,2,\cdots,r$的正整数.

此外,文[4]研究了 $SL(n)$的均值问题,证明了对任意给定的正整数 k及任意实数 $x>2$有渐近公式

[20]收稿日期: 2006-06-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155).
作者简介: 吕国亮(1949-),副教授,研究方向: 代数学和图论.

$$\sum_{n\le x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $c_i\,(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

文 [5]中还研究了 $[SL(n)-S(n)]^2$ 的均值分布问题,证明了渐近公式:

$$\sum_{n\le x}[SL(n)-S(n)]^2 = \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数, $c_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

本文的主要目的是研究一个包含 F. Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 与 Dirichlet除数函数 $d(n)$ 的混合均值问题,并给出一个较强的渐近公式.具体地说也就是证明下面的:

定理　设 $k\ge 2$ 为给定的整数.则对任意实数 $x\ge 2$,我们有渐近公式:

$$\sum_{n\le x} d(n)\cdot SL(n) = \frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet除数函数,即就是 n 的所有正因数的个数 $d(n)=\sum_{d|n}1$, $c_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

2　定理的证明

在这一部分,我们用初等及解析方法直接给出定理的证明.事实上在和式

$$\sum_{n\le x} d(n)\cdot SL(n) \tag{3}$$

中,我们将所有 $1\le n\le x$ 分为两个集合 U 与 V,其中集合 U 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数;而集合 V 包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 U 的那些正整数.于是利用性质 (1)我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in U} d(n)\cdot SL(n) &= \sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}} d(n)\cdot SL(n) = \sum_{\substack{np\le x\\ n<p}} d(np)\cdot SL(np)\\ &= \sum_{\substack{np\le x\\ n<p}} 2p\cdot d(n) = \sum_{n\le\sqrt{x}} 2d(n)\sum_{n<p\le\frac{x}{n}} p \end{aligned}\tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$.于是利用 Abel求和公式 (参阅文 [6]中定理 4, 2)及素数定理 (文 [7]中定理 3. 2):

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$$

其中 $c_i\,(i=1,2,3,\cdots,k)$ 为常数且 $c_1=1$.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\le\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right) - n\cdot\pi(n) - \int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{x^2}{2n^2\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1} x}\right)\end{aligned}\tag{5}$$

其中 a_i 为可计算的常数.于是注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{及}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\frac{\pi^4}{36}$$

结合(4)及(5)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in U}d(n)\cdot SL(n)&=\frac{x^2}{\ln x}\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{d(n)}{n^2}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k}\frac{2a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)\\&=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

其中 b_i 为可计算的常数.

现在我们讨论集合 V 中的情况,由(1)式及集合 V 的定义知对任意 $n\in V$,当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时,我们有两种情况 $SL(n)=p_r\leqslant\sqrt{n}$ 或者

$$SL(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{p_i^{\alpha_i}\}=p_i^{\alpha_i}$$

$\alpha_i\geqslant 2$.于是由此分析我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant V}d(n)\cdot SL(n)&\leqslant\sum_{np\leqslant x}d(n)\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^{\alpha}\leqslant x\\ \alpha\geqslant 2}}(\alpha+1)\cdot d(n)\cdot p^{\alpha}\\&\leqslant\sum_{n\leqslant x}d(n)\sqrt{n}\cdot\ln n\ll x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x\end{aligned}\tag{7}$$

其中我们用到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\cdot\ln x+O(x)$$

由集合 U 及 V 的定义并结合(3),(6)及(7)式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}d(n)\cdot SL(n)&=\sum_{n\in U}d(n)\cdot SL(n)+\sum_{n\in V}d(n)\cdot SL(n)\\&=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[3] Le Maohua. An equation concerning the Smarandcahe LCM function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[4] Lü Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[5] Jian Ge. Mean value of F. Smarandache LCM function[J]. Scientia Mgana, 2007, 3(2): 109-112.

[6] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[7] 潘承洞,潘承彪.素数定理的初等证明[M].上海:上海科学技术出版社,1988.
[8] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,2003.
[9] 张文鹏,李海龙,郭金保等.初等数论[M].西安:陕西师范大学出版社,2007.

On the hybrid mean value of the F. Smarandache LCM function and the Dirichlet divisor function

LÜ Guoliang
(Department of Mathematics, Weinan Teacher's College, Weinan 321004, China)

Abstract The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the hybrid mean value problem involving the F. Smarandache LCM function and the Dirichlet divisor function, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words F. Smarandache LCM function, Dirichlet divisor function, Hybrid mean value Asymptotic formula
2000 MSC 11B83

(上接第 **292**页)

Recurrent, ergodicity properties for an extended birth-death minimal Q-process

WU Qunying, LIN Liang
(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract A new structure with the special property that catastrophes is imposed to ordinary birth-death processes is considered. Under the condition that the Q-matrix is regular and irreducible, the authors are able to give easy-checking recurrent and ergodicity criteria for such Markov minimal Q-processes by using construction theory of Q-processes. Equilibrium distributions are then established.

Key words stable extended birth-edath minimal Q-process, recurrent, ergodicity
2000 MSC 60J27, 60J99