文章编号:1004-3918(2016)01-0007-04

关于F.Smarandache LCM函数的一个均值分布

赵 琴[1]，高 丽[2]，艾 轮[1]

（1. 陕西省米脂中学 数学组，陕西 榆林 718100； 2. 延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要： 利用初等及解析的方法研究均方差 $(SL(n)-\bar{\omega}(n))^2$ 的均值分布问题,并给出一个有趣的均值分布的渐近公式.

关键词： F.Smarandache LCM 函数；素因数和函数；渐近公式

中图分类号： O 156.4 **文献标识码：** A

Mean Value of the F.Smarandache LCM Function

Zhao Qin[1]， Gao Li[2]， Ai Lun[1]

（1. Mathematics Group，Mizhi Middle School，Yunlin 718100，Shaanxi China；
2. College of Mathematics and Computer Science，Yanan University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract： The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the mean value properties of the mean square error $(SL(n)-\bar{\omega}(n))^2$, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words： F.Smarandache LCM function；prime factor sum function；asymptotic formula

1 引言及结论

对任意的正整数 n，著名的F.Smarandache LCM函数 $SL(n)$ 在文献[1]中，被定义为最小正整数 k，使得 $n\,|\,[1,2,\cdots,k]$，其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数．对于任意正整数 $n>1$，如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式，由 $SL(n)$ 的定义很容易就推出

$$SL(n)=\max\left\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}\right\}. \tag{1}$$

关于 $SL(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，获得了一系列有趣的结果．例如文献[2]研究了 $SL(n)$ 的均值问题，证明了对任意给定的正整数 k 及任意实数 $x>2$ 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left[\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right],$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．文献[3]还研究了 $(SL(n)-S(n))^2$ 的均值分布问题，证明了渐近公式

$$(SL(n)-S(n))^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{2}{3}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．

收稿日期： 2015-08-06
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10271093)；陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)
作者简介： 赵 琴(1985-)，女，二级教师，从事数论方面的研究工作
通信作者： 高 丽(1966-)，女，教授，硕士，主要从事数论、代数方面的研究．

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

现在定义一个新的算数函数 $\bar{\omega}(n)$ 如下：$\bar{\omega}(1)=1$，对任意的正整数 $n>1$，如果它的标准分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，令 $\bar{\omega}(n)=p_1+p_2+\cdots+p_s$，则称 $\bar{\omega}(n)$ 为 n 的素因数和函数．例如 $\bar{\omega}(1)=1$，$\bar{\omega}(2)=2$，$\bar{\omega}(3)=3$，$\bar{\omega}(4)=2$，$\bar{\omega}(5)=5$，$\bar{\omega}(6)=5$，$\bar{\omega}(7)=7$，$\bar{\omega}(8)=2$，$\bar{\omega}(9)=3$，$\bar{\omega}(10)=7$，$\cdots$．显然，这个函数与 n 的不同的素因子个数 $\omega(n)$ 密切相关，也是可加函数，即对任意的正整数 m,n 有

$$\bar{\omega}(m\cdot n)=\bar{\omega}(m)+\bar{\omega}(n). \tag{2}$$

文献[4]对 $\bar{\omega}(n)$ 进行了研究，得到了它的均值公式

$$\sum_{n\leqslant x}\bar{\omega}(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot x^2+x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left[\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right], \tag{3}$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．文献[5-6]也给出了一些很好的结果．

本文研究了 F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 的一个均方差的均值分布，并给出一个有趣的均值分布的渐近公式．具体也就是证明下面的定理．

定理 对任意实数 $x\geqslant 2$，有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数，$d_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．

2 定理的证明

利用初等及解析方法给出定理的证明．事实上在和式

$$\sum_{n\leqslant x}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2$$

中，将区间 $[1,x]$ 中的正整数 n 分成四个子集合 A,B,C 和 D．其中集合 A 包含所有那些满足存在素数 p 使得 $p|n$ 且 $p>\sqrt{n}$ 的正整数 n；集合 B 包含区间 $[1,x]$ 中所有满足 $n=n_1p_1p_2$ 的那些正整数 n，其中 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{n}$；集合 C 包含区间 $[1,x]$ 中所有满足 $n=n_1p^2$ 的那些正整数 n，其中 $n^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{n}$；而集合 D 包含区间 $[1,x]$ 中所有不属于集合 A，B 和 C 的正整数 n．于是利用性质(1)及集合 A 的定义有

$$\sum_{n\in A}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p>\sqrt{n}}}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}\left(p-p-\bar{\omega}(n)\right)^2=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}\bar{\omega}^2(n)\ll\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}n^2\ll\frac{x^2}{\ln x}. \tag{4}$$

设 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$，利用文献[7-8]中的Abel求公式及素数定理

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in B}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2&=\sum_{\substack{np_1p_2\leqslant x\\ x^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant\sqrt{np_1p_2}}}\left(p_2-\left(p_1+p_2+\bar{\omega}(n)\right)\right)^2=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{np_1}}\left(p_1+\bar{\omega}(n)\right)^2=\\ &\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{np_1}}\left(p_1^{\,2}+O\left(p_1x^{\frac{1}{3}}\right)\right)=\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p_1<\sqrt{\frac{x}{n}}}\sum_{p_1<p_2\leqslant\frac{x}{np_1}}p_1^{\,2}+O\left(\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}\right)\ll\frac{x^2}{\ln^2 x},\end{aligned} \tag{5}$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\sum_{\substack{np_1^2\leqslant x\\ n<p_1}}\left(p_1^{\ 2}-\left(p_1+\bar{\omega}(n)\right)\right)^2=\sum_{\substack{np_1^2\leqslant x\\ n<p_1}}\left(p_1^{\ 2}-p_1-\bar{\omega}(n)\right)^2=$$
$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p<\sqrt{\frac{x}{n}}}\left[p^4+O\left(p^3\right)+O\left(p^2n\right)\right]= \tag{6}$$
$$\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\ \sum_{n<p<\sqrt{\frac{x}{n}}}p^4+O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right).$$

利用Abel恒等式可得

$$\sum_{n<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}p^4=\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^4\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-n^4\cdot\pi(n)-\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}4t^3\pi(t)\mathrm{d}t=$$
$$2\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{\ln x-\ln n}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{n}}}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)\right)-n^4\cdot\pi(n)-$$
$$4\int_n^{\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(\frac{t^4}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_it^4}{\ln^it}+O\left(\frac{t^4}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t=$$
$$2\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{\ln x-\ln n}-\frac{4}{5}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{\ln\sqrt{\frac{x}{n}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\frac{x}{n}}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)\right)= \tag{7}$$
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\ln x}\cdot\left(1+\frac{\ln n}{\ln x}+\frac{\ln^2n}{\ln^2x}+\cdots+\frac{\ln^mn}{\ln^mx}+\cdots\right)+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i}{\ln^i\frac{x}{n}}+O\left(\frac{1}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{n}}}\right)\right)=$$
$$\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\frac{5}{2}}\ln^in}{n^{\frac{5}{2}}\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数. 注意到 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}=\zeta\left(\frac{5}{2}\right)$ 及 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln^in}{n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛,结合(6)式可得

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{8}$$

其中 $d_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

现在讨论集合 D 中的情况,由(1)式及集合 D 的定义知,对任意正整数 $n\in D$,如果 $SL(n)=p$ 是一个素数,则 $p\leqslant\sqrt{n}$;如果 $SL(n)=p^2$ 则 $p\leqslant n^{\frac{1}{3}}$;或者 $SL(n)=p^\alpha,\alpha\geqslant3$. 无论哪种情况都有

$$\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2\ll\sum_{np\leqslant x}\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant n}}p^4+\sum_{\substack{np^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant3}}p^{2\alpha}\ll x^{\frac{7}{3}}. \tag{9}$$

由集合 A,B,C,D 的定义并结合(4),(5),(8),(9)式,有

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

$$\sum_{n\le x}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=\sum_{n\in A}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2+\sum_{n\in B}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=$$

$$\sum_{n\in C}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2+\sum_{n\in D}\left(SL(n)-\bar{\omega}(n)\right)^2=$$

$$\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数．于是完成了定理的证明．

参考文献：

[1] F.Smarandache. Only problems，not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publ House，1993.
[2] Lü Zhongtian. On the F.Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna，2007，3(1)：22-25.
[3] 黄 炜. 素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 及其均值[J]. 河南科学，2009，27(9)：1031-1033.
[4] Ge Jian. Mean value of F.Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna，2007，3(2)：109-112.
[5] 吕国亮. 关于F.Smarandache LCM函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学，2007，23(3)：315-318.
[6] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal，2001(12)：307-309.
[7] 潘承洞，潘承彪. 素数定理初等的证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.
[8] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Springer-Verlag，1976.

（编辑 康 艳）

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net