第30卷 第6期 兰州理工大学学报 Vol. 30 No. 6
2004年12月 Journal of Lanzhou University of Technology Dec. 2004

文章编号：1000-5889(2004)06-0134-03

关于 F. Smarandache 一个问题的注记

王 阳

（南阳师范学院 数学系，河南 南阳 473061）

摘要：设 n 为正整数，$S(n)$ 表示 n 的立方幂补数，实数 $k\geqslant 1$. 探讨了 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}$ 和 $\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}$ 的渐近性质，进一步解决了由 F. Smarandache 教授提出的第 28 个问题，给出了两个渐近公式.

关键词：立方幂补数；倒数；均值；渐近公式

中图分类号：O156.4 文献标识码：A

On a notation in a problem of F. Smarandache

WANG Yang

(Dept. of Mathematics, Nanyang Teacher's College, Nanyang 473061, China)

Abstract: Let n be a positive integer, $S(n)$ be the cubic complement of n, and real number $k\geqslant 1$. The asymptotic property of $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}$ and $\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}$ is discussed, the 28-th problem generated by professor F. Smarandache is further solved, and two asymptotic formulas are given.

Key words: cubic complement; reciprocal; mean value; asymptotic formula

设 n 为正整数，则 n 可唯一表示为 $n=u^3v^2w$，其中 u、v、w 为整数，且 v、w 均无大于 1 的平方因子，$(v,w)=1$. 设 $S(n)$ 为 n 的立方幂补数，即 $S(n)$ 就是使 nk 成为一个立方幂的最小正整数 k，则对素数 p 及整数 $m\geqslant 0$ 有

$$S(p^m)=\begin{cases}1 & (m=3t)\\ p^2 & (m=3t+1)\\ p & (m=3t+2)\end{cases}$$

1993 年，F. Smarandache 教授在文献[1]中提出了 105 个未解决的问题. 文献[2～5]中解决了其中的第 27 个问题（即平方补数的性质），同时文献[6, 7]中初步研究了第 28 个问题，即立方幂补数 $S(n)$ 的渐近性质. 本文的主要目的是研究立方幂补数倒数的性质，进一步解决文献[1]中 F. Smarandache 教授提出的第 28 个问题，并用解析的方法得到了 $\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}$ 和 $\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}$ 的渐近公式，具体如下：

定理 1 对任意实数 $x\geqslant 1$ 及给定的实数 $k\geqslant 1$，有渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}x^{\frac{1}{3}}\times\prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{6}}\log^2 x\right)$$

其中，$\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数，$\prod_p$ 表示对一切素数 p 求积.

定理 2 对任意实数 $x\geqslant 1$ 及给定的实数 $k\geqslant 1$，有渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{4\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}x^{\frac{4}{3}}\times\prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)+O\left(x^{\frac{7}{6}}\log^2 x\right)$$

1 引理

为了完成定理的证明，需要下列引理. 设 $s=\sigma$

收稿日期：2004-02-20
基金项目：南阳市科委基金项目(20030707)
作者简介：王 阳(1962-)，女，河南南阳人，副教授，硕士.

$+it$, $\zeta(s)$为 Riemann Zeta 函数, 给定一实数 $k\geqslant 1$, p 为素数.

引理 1　设 ε 为任意的正常数, 当 $\sigma>1$ 时, 定义: $A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^k(n)n^s}$, 则

1) $A(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 1+\varepsilon$ 有界且解析;

2) $A(s)=\frac{\zeta(3s)\zeta(2s+k)\zeta(s+2k)}{\zeta(4s+2k)\zeta(2s+4k)}h(s)$, 其中 $h(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant\frac{1}{3}-k+\varepsilon$ 有界且解析.

证明　(1) 显然 $\frac{1}{S^k(n)}\ll 1$. 当 $\sigma>1$ 时, 由文献[8] 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^k(n)n^s}$ 绝对一致收敛. 故 $A(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 1+\varepsilon$ 有界且解析.

(2) 容易验证 $\frac{1}{S^k(n)}$ 是积性函数. 由文献[9] 知, 当 $\sigma>1$ 时

$$A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^k(n)n^s}=\prod_p\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{S^k(p^m)p^{ms}}\right)=$$
$$\prod_p\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p^{3ts}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p^{(3t+1)s+2k}}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{p^{(3t+2)s+k}}\right)=$$
$$\prod_p(1-p^{-3s})^{-1}\prod_p(1+p^{-(s+2k)}+p^{-(2s+k)})=$$
$$\frac{\zeta(3s)\zeta(s+2k)\zeta(2s+k)}{\zeta(2s+4k)\zeta(4s+2k)}\times\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p^{s+2k})(1+p^{2s+k})}\right)$$

取 $h(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p^{s+2k})(1+p^{2s+k})}\right)$, 当 $\sigma\geqslant\frac{1}{3}-k+\varepsilon$, 显然级数

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{(1+p^{s+2k})(1+p^{2s+k})}\right)$$

绝对一致收敛, 所以 $h(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant\frac{1}{3}-k+\varepsilon$ 有界且解析.　　(证毕)

同理可证:

引理 2　设 ε 为任意的正常数ε, 当 $\sigma>2$ 时, 定义: $B(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S^k(n)n^s}$, 则

1) $B(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 2+\varepsilon$ 有界且解析;

2) $B(s)=\frac{\zeta(3s-3)\zeta(2s+k-2)\zeta(s+2k-1)}{\zeta(4s+2k-4)\zeta(2s+4k-2)}g(s)$, 其中 $g(s)$在半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant\frac{1}{3}-k+\varepsilon$ 有界且解析.

2　定理的证明

1) 定理 1 的证明

显然 $\frac{1}{S^k(n)}\ll 1$, 且当 $\sigma>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^k(n)n^{\sigma}}=\frac{\zeta(3\sigma)\zeta(\sigma+2k)\zeta(2\sigma+k)}{\zeta(2\sigma+4k)\zeta(4\sigma+2k)}h(\sigma)\ll 1$, 于是对 $b=1+\frac{1}{\log x}$, $T\geqslant 1$ 及半奇数 x, 由文献[9] 中的 Perron 公式, 能够得到

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^b}{T}\right)+O\left(\frac{x\log x}{T}\right)$$

取 $a=\frac{1}{6}+\frac{1}{3\log x}$, 改变积分路线, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}=U(X)+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\times\frac{\zeta(3s)\zeta(2s+k)\zeta(s+2k)}{\zeta(4s+2k)\zeta(2s+4k)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x\log x}{T}\right)$$

其中, $U(x)$是 $A(s)\frac{x^s}{s}$在$s=\frac{1}{3}$处的一阶留数, 容易算出

$$U(x)=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}x^{\frac{1}{3}}\times\prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)$$

由引理 1 知

$$\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\frac{\zeta(3s)\zeta(s+2k)\zeta(2s+k)}{\zeta(2s+4k)\zeta(4s+2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\ll\frac{x^b}{T}+\frac{x^aT^{\frac{1}{4}}}{T}$$

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta(3s)\zeta(s+2k)\zeta(2s+k)}{\zeta(2s+4k)\zeta(4s+2k)}h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\ll\int_0^T\frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|}{t+1}x^a\mathrm{d}t\ll x^a\log^2 T$$

取 $T=x$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{S^k(n)}=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}\times\prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)+O\left(x^{\frac{1}{6}}\log^2 x\right)$$

定理 1 得证.

2) 定理 2 的证明

显然$\frac{n}{S^k(n)}\ll n$, 且当 $\sigma>2$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S^k(n)n^{\sigma}}=$$

$$\frac{\zeta(3\sigma-3)\zeta(\sigma+2k-1)\zeta(2\sigma+k-2)}{\zeta(2\sigma+4k-2)\zeta(4\sigma+2k-4)}g(\sigma)\ll 1$$

于是对 $b=2+\frac{1}{\log x}$, $T\geqslant 1$ 及半奇数 x, 由文献[9]中的 Perron 公式, 能够得到:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}B(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^b}{T}\right)+O\left(\frac{x\log x}{T}\right)$$

取 $a=\frac{7}{6}+\frac{1}{3\log x}$, 改变积分路线, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}=V(x)+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a-iT}^{a+iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\times \frac{\zeta(3s-3)\zeta(2s+k-2)\zeta(s+2k-1)}{\zeta(4s+2k-4)\zeta(2s+4k-2)}\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x\log x}{T}\right)$$

其中, $V(x)$是 $B(s)\frac{x^s}{s}$在 $s=\frac{4}{3}$处的一阶留数, 不难算出

$$V(x)=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}x^{\frac{4}{3}}\times \prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)$$

由引理 2 知

$$\left(\int_{b-iT}^{a-iT}+\int_{a+iT}^{b+iT}\right)\times \frac{\zeta(3s-3)\zeta(s+2k-1)\zeta(2s+k-2)}{\zeta(2s+4k-2)\zeta(4s+2k-4)}\times g(s)\frac{x^s}{s}ds\ll\frac{x^b}{T}$$

$$\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{\zeta(3s-3)\zeta(s+2k-1)\zeta(2s+k-2)}{\zeta(2s+4k-2)\zeta(4s+2k-4)}\times g(s)\frac{x^s}{s}ds\ll x^{\frac{7}{6}}\log^2 T$$

取 $T=x$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{n}{S^k(n)}=\frac{\zeta\left(2k+\frac{1}{3}\right)\zeta\left(k+\frac{2}{3}\right)}{4\zeta\left(4k+\frac{2}{3}\right)\zeta\left(2k+\frac{4}{3}\right)}x^{\frac{4}{3}}\times \prod_p\left(1-\frac{1}{\left(1+p^{2k+\frac{1}{3}}\right)\left(1+p^{k+\frac{2}{3}}\right)}\right)+O\left(x^{\frac{7}{6}}\log^2 x\right)$$

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 刘红艳, 苟 素. 关于 F. Smarandache 的一个问题[J]. 延安大学学报, 2001(3): 5-6.

[3] 王 阳, 张红莉. 平方补数的一个性质[J]. 延安大学学报, 2002(2): 9-10.

[4] 张红莉, 王 阳. 关于平方补数除数函数的均值[J]. 纺织高校基础科学学报, 2002(1): 44-46.

[5] 王 阳. 关于平方补数的 k 次均值[J]. 宁夏大学学报, 2003(1): 26-27.

[6] 王 阳. F. Smarandache 的一个问题[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32: 687-690.

[7] 王 阳. 关于三次方幂补数的均值[J]. 纯粹数学与应用数学, 2002(3): 137-139.

[8] TOM M. Apostol introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.