第 43 卷第 20 期 数学的实践与认识 Vol.43, No.20
2013年 10 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Oct., 2013

关于 F.Smarandache 五次方阶数列及其性质

王晓梅

(西北大学 数学系, 陕西 西安 710127)

摘 要: 对任意正整数 n, 设 $\{c_n\}$ 表示 Smarandache F 五次方数列, 即 $c_n = n^5$. 而 F.Smarandache 五次方阶数列 $\{z_n\}$ 定义为最小的正整数 z_n, 使得 $c_n^{z_n} \equiv 1(\bmod c_{n+1})$. 本文的主要目的是利用初等方法研究数列 z_n 的计算问题, 并给出了 z_n 的具体表示形式. 从而证明了两个结论: A. 数列 z_n 中除了第一项外, 其余项都是偶数. B. 在数列 z_n 中存在无限多个完全四次方幂. 文章的最后就一般的 p 次方阶数列 (其中 p 为素数), 给出了相应的结论.

关键词: 五次方阶数列; 同余性质; p 次方阶数列

1 引言及结论

对任意正整数 n, 设 $\{c_n\}$ 表示 Smarandache F 立方数列, 即 $c_n = n^3$. 而 Smarandache F 立方阶数列 $\{z_n\}$ 定义为最小的正整数 z_n, 使得 $c_n^{z_n} \equiv 1(\bmod c_{n+1})$. 这一数列是日本学者 Kenichiro Kashihara 博士在文献 [1] 中引入的, 同时他研究了该数列的性质, 并提出了两个有意义的猜想:

猜想 A 数列 $\{z_n\}$ 中除了第一项外, 其余项都是偶数;

猜想 B 在数列 $\{z_n\}$ 中存在无限多个完全平方数.

丁争尚在文献 [2] 中研究了上述两个问题, 并证明了它们的正确性. 有关的工作也可以在文献 [3–4] 中查到, 这里不再一一列举. 然而, 对于更一般的 Smarandache F p 次方阶数列, 至今还没有人研究, 至少在现有的文献中没有看到. 本文主要针对 Smarandache F 五次方阶数列的性质进行了研究, 而且认为这是有意义的工作, 它对更一般的 Smarandache F p 次方阶数列性质的研究有重要的指导作用! 为此, 我们首先利用初等方法研究了 z_n 的计算问题, 并给出了 z_n 的精确计算公式. 即就是证明了下面的:

定理 1 对任意正整数 n, 定义 $c_n = n^5$, z_n 为最小的正整数使得 $c_n^{z_n} \equiv 1(\bmod c_{n+1})$. 则我们有表示式:

(a) $z_n = (n+1)^4$, 如果 $n \equiv 1(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 3(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 5(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 7(\bmod 10)$;

(b) $z_n = 2(n+1)^4$, 如果 $n \equiv 0(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 2(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 6(\bmod 10)$ 或者 $n \equiv 8(\bmod 10)$;

(c) $z_n = \frac{1}{5}(n+1)^4$, 如果 $n \equiv 9(\bmod 10)$;

收稿日期: 2012-00-00
资助项目: 国家自然科学基金 (11071194) 及陕西省教育厅科学计划项目 (12JK871)

(d) $z_n=\frac{2}{5}(n+1)^4$, 如果 $n\equiv 4(\mathrm{mod}10)$.

显然由此定理我们立刻推出下面两个结论：

(A) 数列 $\{z_n\}$ 中除了第一项外, 其余项都是偶数;

(B) 在数列 $\{z_n\}$ 中存在无限多个完全四次方数.

对一般的奇素数 p, 我们也可以给出一般性的结论, 也就是下面的：

定理 2 对任意正整数 n, 定义 $c_n=n^p$, z_n 为最小的正整数使得 $c_n^{z_n}\equiv 1(\mathrm{mod}c_{n+1})$. 则我们有表示式:

(a) $z_n=(n+1)^{p-1}$, 如果 $n\equiv 2i-1(\mathrm{mod}2p)$, 其中 $(i,p)=1$;

(b) $z_n=2(n+1)^{p-1}$, 如果 $n\equiv i-1(\mathrm{mod}2p)$, 其中 $(i,2p)=1$;

(c) $z_n=\frac{1}{p}(n+1)^{p-1}$, 如果 $n\equiv 2p-1(\mathrm{mod}2p)$;

(d) $z_n=\frac{2}{p}(n+1)^{p-1}$, 如果 $n\equiv p-1(\mathrm{mod}2p)$.

显然当 $p=3$ 时由我们的定理 2 立刻推出文献 [2] 中的结论. 所以我们的结果是文献 [2] 的进一步推广和延伸. 当然利用本文的方法我们还可以处理 p 为合数的情况, 只是在这种情况下合数越大, 分的类越多, 计算越复杂. 因而这里没有深入考虑.

2 定理的证明

这节我们直接给出定理 1 的证明, 文中所用到的初等数论知识在文献 [5] 及文献 [6] 中均可以找到, 这里不再重复. 首先给出结论 (A) 的简单证明.

事实上对任意正整数 $n>1$, 设 y 是最小的正整数, 使得

$$n^{5y}\equiv 1(\mathrm{mod}(n+1)^5) \tag{1}$$

则由 (1) 式及二项式定理可得

$$n^{5y}-1=(n+1-1)^{5y}-1\equiv(-1)^{5y}-1\equiv(-1)^y-1\equiv 0(\mathrm{mod}(n+1))$$

由上式立即推出 y 一定为偶数. 所以当 $n>1$ 时, z_n 一定是偶数. 于是就证明了结论 (A).

为计算 z_n 的具体值, 我们继续应用同余式 (1) 及二项式定理并注意 y 为偶数可得:

$$\begin{aligned}n^{5y}-1=(n+1-1)^{5y}-1=(-1)^{5y}+C_{5y}^1(-1)^{5y-1}(n+1)+C_{5y}^2(-1)^{5y-2}(n+1)^2+\\ C_{5y}^3(-1)^{5y-3}(n+1)^3+C_{5y}^4(-1)^{5y-4}(n+1)^4-1\equiv 0(\mathrm{mod}(n+1)^5)\end{aligned}$$

注意到 y 为偶数, 则有下列同余式成立：

$$\begin{aligned}&-5y+\frac{5}{2}y(5y-1)(n+1)-\frac{5}{6}y(5y-1)(5y-2)(n+1)^2+\\ &\frac{5}{24}y(5y-1)(5y-2)(5y-3)(n+1)^3\equiv 0(\mathrm{mod}(n+1)^4)\end{aligned} \tag{2}$$

由上式也可以推出同余式

$$-5y\equiv 0(\mathrm{mod}(n+1)) \tag{3}$$

我们分几种情况讨论:

当 $(5,n+1)=1$ 时, 由 (3) 式即可推出 $y=k(n+1)$, 其中 k 为任意正整数, 将 $y=k(n+1)$ 代入 (2) 式可得

$$-5k(n+1)+\frac{5}{2}k(n+1)^2[5k(n+1)-1]-\frac{5}{6}k(n+1)^3[5k(n+1)-1][5k(n+1)-2]+$$

$$\frac{5}{24}k(n+1)^4[5k(n+1)-1][5k(n+1)-2][5k(n+1)-3] \equiv 0(\mathrm{mod}(n+1)^4) \tag{4}$$

由于 y 为偶数, 所以当 $n+1$ 为偶数时, (4) 式的最小正整数解为 $k=(n+1)^3$, 此时注意到 $2|n+1$, $(5,n+1)=1$, 从而

$$n=10t+1 \text{ 或者 } n=10t+3 \text{ 或者 } n=10t+5 \text{ 或者 } n=10t+7,$$

其中 t 为任意非负整数. 所以当 n 为形如 $10t+1$ 或者 $10t+3$ 或者 $10t+5$ 或者 $10t+7$ 的正整数 (其中 t 为任意非负整数) 时, 满足 $n^{5z_n} \equiv 1(\mathrm{mod}(n+1)^5)$ 的最小正整数 z_n 为

$$z_n=(n+1)^4$$

同样当 $n+1$ 为奇数时, 注意到 y 为偶数, 所以 (4) 式的最小正整数解为 $k=2(n+1)^3$. 此时注意到 $(10,n+1)=1$, 从而

$$n=10t \text{ 或者 } n=10t+2 \text{ 或者 } n=10t+6 \text{ 或者 } n=10t+8$$

其中 t 为任意非负整数. 所以当 n 为形如 $10t$ 或者 $10t+2$ 或者 $10t+6$ 或者 $10t+8$ 的正整数 (其中 t 为任意非负整数) 时, 满足 $n^{5z_n} \equiv 1(\mathrm{mod}(n+1)^5)$ 的最小正整数 z_n 为

$$z=2(n+1)^4$$

当 $(5,n+1)>1$ 时, 即就是 $5|n+1$ 时, 由 (3) 式即可推出 $y=\frac{1}{5}k(n+1)$, 其中 k 为任意正整数, 将 $y=\frac{1}{5}k(n+1)$ 代入 (2) 式可得

$$-k(n+1)+\frac{1}{2}k(n+1)^2[k(n+1)-1]-\frac{1}{6}k(n+1)^3[k(n+1)-1][k(n+1)-2]+$$
$$\frac{1}{24}k(n+1)^4[k(n+1)-1][k(n+1)-2][k(n+1)-3] \equiv 0(\mathrm{mod}(n+1)^4) \tag{5}$$

显然当 $n+1$ 为偶数时, (5) 式的最小正整数解为 $k=(n+1)^3$, 此时注意到 $10|n+1$, 即就是 $n=10t+9$, 所以当 n 为形如 $10t+9$ 的正整数 (其中 t 为任意非负整数) 时, 满足 $n^{5z_n} \equiv 1(\mathrm{mod}(n+1)^5)$ 的最小正整数 z_n 为

$$z_n=\frac{1}{5}(n+1)^4$$

而当 $n+1$ 为奇数时, 注意到 y 为偶数, 所以满足 (5) 式的最小正整数解为 $k=2(n+1)^3$. 此时注意到 $(2,n+1)=1$, $5|n+1$, 即就是 $n=10t+4$, 所以当 n 为形如 $10t+4$ 的正整数 (其中 t 为任意非负整数) 时, 满足 $n^{5z_n} \equiv 1(\mathrm{mod}(n+1)^5)$ 的最小正整数 z_n 为

$$z=\frac{2}{5}(n+1)^4$$

由于 $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9(\mathrm{mod}10)$ 覆盖了所有的自然数, 从而结合以上几种情况完成了定理 1 的证明.

仿照定理 1 的证明过程, 我们同样可以推出定理 2. 也可以给出 p 次方阶数列的两个结论:

(A) 数列 $\{z_n\}$ 中除了第一项外, 其余项都是偶数;

(B) 在数列 $\{z_n\}$ 中存在无限多个完全 $p-1$ 次方数.

参考文献

[1] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[2] 丁争尚. 关于立方阶数列及其两个猜想 [J], 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(3): 430-432.

[3] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[4] Amarnath Murthy and Charles Ashbacher, Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences[M]. Hexis, Phoenix, 2005.
[5] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory[M], New York: Springer-Verlag, 1976.
[6] 张文鹏, 李海龙. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2008.

On The 5-Th Order Sequence and Its Some Properties

WANG Xiao-mei

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, let $\{c_n\}$ be the Smarandache F 5-th number sequence $c_n = n^5$. The Smarandache F 5-th order sequence is given by z_n: z_n is the smallest positive integer solution of the congruence equation $c_n^{z_n} \equiv 1(\bmod c_{n+1})$. The main purpose of this paper is using the elementary method to given an exact expression for z_n , then prove that two conclusions: A. All terms except the first term in sequence z_n are even and B. There are infinitely many complete forth power numbers in z_n. Finally, we give a general conclusion for any odd prime p, the p-th power order sequence.

Keywords: The 5-th order sequence; congruence; the p-th order sequence