2007年 3月
第 23卷第 1期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Mar. 2007
Vol. 23 No. 1

关于 F. Smarandache函数 $S(m^n)$的渐近性质

朱伟义 ⒇

(浙江师范大学数学物理信息工程学院,浙江 金华 321004)

摘 要: 设 $m \geqslant 2$为给定的整数, n 为任意正整数.本文的主要目的是利用初等方法研究著名的 F. Smarandache函数 $S(m^n)$当 $n \to \infty$时的渐近性质,并给出一个较强的渐近公式.

关 键 词: F. Smarandache函数;幂 p 的原数函数;渐近公式

中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1008-5513(2007)01-0001-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 F. Smarandache函数 $S(n)$定义为最小的正整数 m使得 $n | m!$.即就是 $S(n) = \min\{m: m \in \mathbf{N}, n | m!\}$参见文 [1-2].从 $S(n)$的定义,我们很容易推断出如果 $n = p_1^{T_1} p_2^{T_2} \cdots p_k^{T_k}$是 n的标准素因数分解式,那么

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{T_i})\} \tag{1}$$

例如: $S(1) = 1, S(2) = 2, S(3) = 3, S(4) = 4, S(5) = 5, S(6) = 3, S(7) = 7, S(8) = 4, S(9) = 6, S(10) = 5, \cdots$.关于 $S(n)$的算术性质,有不少学者进行过研究,获得了不少有重要理论价值的研究成果.例如, Farris Mark和 Mitchell Patrick在文 [3]中研究了 F. Smarandache函数的有界性问题,得出了函数 $S(p^T)$的上下界估计.即就是证明了

$$(p-1)T+1 \leqslant S(p^T) \leqslant (p-1)[T+1+\log_p T]+1$$

王永兴教授在文 [4]中研究了 $S(n)$的均值性质,给出了该函数均值的一个较强的渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} S(n) = \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

Lu Yaming[5] 研究了一个包含 $S(n)$的方程的可解性问题,证明了对任意正整数 $k \geqslant 2$,方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

Jozsef Sandor[6] 进一步证实了对任意正整数 $k \geqslant 2$,存在无限多组正整数 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式:

⒇收稿日期: 2006-03-20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671155).
作者简介: 朱伟义 (1964-),副教授,研究方向: 基础数学.

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

同样又存在无限多组正整数 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$ 使得

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

另一方面,对任意正整数 n,我们定义幂 p 的原数函数 $S_p(n)$ 为最小的正整数 m,使得 $p^n\mid m!$.即就是

$$S_p(n)=\min\{m: m\in \mathbf{N}, p^n\mid m!\}$$

其中 p 为素数.例如: $S_3(1)=3, S_3(2)=6, S_3(3)=S_3(4)=9,\cdots$.在文 [1]的第 49个问题中,罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache教授建议我们研究序列 $\{S_p(n)\}$ 的性质.关于这个问题,张文鹏教授和刘端森教授在文 [7]中研究了序列 $\{S_p(n)\}$ 的渐近性质,并得到了一个有趣的渐近公式,也就是对于任意给定的素数 p 和任意正整数 n,他们证明了

$$S_p(n)=(p-1)n+O\left(\frac{p}{\ln p}\ln n\right) \tag{2}$$

徐哲峰博士 [8]中研究了 Riemann ζ-函数与序列 $\{S_p(n)\}$ 之间的关系,给出了一个包含数列 $S_p(n)$ 的无穷级数的一个有趣的恒等式.即就是证明了对任意素数 p 和 $\mathrm{Re}\, s>1$ 的复数 s,我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_p^s(n)}=\frac{\zeta(s)}{p^s-1}$$

这里 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数.

同时,徐哲峰[8] 还证明了对于任意实数 $x\geqslant 1$ 有渐近公式

$$\sum_{\substack{n=1\\ S_p(n)\leqslant x}}^{\infty}\frac{1}{S_p(n)}=\frac{1}{p-1}\left(\ln x+\gamma+\frac{p\ln p}{p-1}\right)+O\left(x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

这里 γ 是 Euler常数, ε 表示任意给定的正数.

显然函数 $S_p(n)$ 和 $S(n)$ 密切相关.事实上从它们的定义及其性质不难看出

$$S(p^n)=S_p(n) \tag{3}$$

因此通过 $S_p(n)$ 的惭近性质我们可以研究 $S(m^n)$ 的渐近性质.在这篇文章中我们正是利用这一关系研究了函数 $S(m^n)$ 的渐近性质,得到了一个较强的渐近公式.即就是利用初等方法以及文 [7]中的结果证明下面的:

定理 设 $m>1$ 为给定的正整数且标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.则对任意正整数 n,我们有渐近公式

$$S(m^n)=(p-1)\alpha n+O\left(\frac{m}{\ln m}\ln n\right)$$

其中 $(p-1)\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{(p_i-1)\alpha_i\}$.

由此定理我们立刻得到下面的:

推论 设 $m>1$ 为给定的正整数且标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,那么我们有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(m^n)}{n}=(p-1)\alpha$$

其中 $(p-1)\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{(p_i-1)\alpha_i\}$.

2 定理的证明

在这一部分,我们来完成定理的证明.为了方便起见我们设 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 m的标准素因数分解式,则 $m^n = p_1^{\alpha_1 n} p_2^{\alpha_2 n} \cdots p_k^{\alpha_k n}$.那么由(1)式有

$$S(m^n) = S(p_1^{\alpha_1 n} p_2^{\alpha_2 n} \cdots p_k^{\alpha_k n}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{\alpha_i n})\} \tag{4}$$

从 $S_p(n)$与 $S(n)$的关系式(3)我们可得

$$S(p_i^{\alpha_i n}) = S_{p_i}(\alpha_i n)$$

所以此时我们将研究函数 $S(p^n)$的渐近性问题就可以转化为研究函数 $S_p(n)$的渐近性问题.由上式及渐近式(2)我们立刻得到

$$S(p_i^{\alpha_i n}) = S_{p_i}(\alpha_i n) = (p_i - 1)\alpha_i n + O\left(\frac{p_i}{\ln p_i} \ln(n\alpha_i)\right) \tag{5}$$

不失一般性我们可假定

$$S(p^{\alpha n}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S(p_i^{\alpha_i n})\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{S_{p_i}(\alpha_i n)\} \tag{6}$$

显然由渐近式(5)不难看出对充分大的正整数 n,当 $(p_i - 1)\alpha_i$ 最大时,$S_{p_i}(\alpha_i n)$最大,因而 $S(p_i^{\alpha_i n})$最大.因此注意到误差项

$$O\left(\frac{p_i}{\ln p_i} \ln(n\alpha_i)\right) = O\left(\frac{m}{\ln m} \ln n\right)$$

由(4),(5)及(6)式立刻得到

$$S(m^n) = S(p^{\alpha n}) = S_p(n\alpha) = (p - 1)\alpha n + O\left(\frac{p}{\ln p} \ln(\alpha n)\right) = (p - 1)\alpha n + O\left(\frac{m}{\ln m} \ln n\right)$$

其中 $(p - 1)\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{(p_i - 1)\alpha_i\}$,于是完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Jozsef Sandor. On an generalization of the Smarandache function[J]. Notes Numb. Th. Discr. Math., 1999, 5: 41-51.

[3] Farris Mark, Mitchell Patrick. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Nations Journal. 2002, 13: 37-42.

[4] Wang Yongxing. On the Smarandache function [C]// Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Li Duansen. Research on Smarandache problem in number Theory Ⅱ. Hexis: Phoenix, AZ, 2005.

[5] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna., 2006, 2(1): 76-79.

[6] Jozsef Sandor. On certain inequalities involving the Smarandache function[J]. Scientia Magna., 2006, 2(3): 78-80.

(下转第 27页)

Boundary value problems for the non-dimensional linear shallow-water equations on an equatorial β - plane

SHEN Chun

(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China)

Abstract Based on the theory of stratification, the well-posedness of the boundary value problems for the linear shallow-water equations on an equatorial U -plane was discussed and the corresponding discriminating ways was given. The local solution space was constructed respectively for the boundary value problems on the hyper-surface$\{x = f(y,t)\}$ and on the hyper-surface$\{y = g(x,t)\}$.

Key words stratification, boundary value problem, well-posedness, shallow-water equations

2000 MSC 35Q05, 35B30

(上接第 3页)

[7] Zhang Wenpeng, Liu Duansen. On the primitive numbers of power p and its asymptotic property [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13 171-175.

[8] Xu Zhefeng. Some arithmetical properties of primitive numbers of power p [J]. Scientia Magna, 2006, 2 (1): 9-12.

On the asymptotic property of the F. Smarandache function $S(m^n)$

Zhu Weiyi

(College of Mathematics, Physics and Information Engineer

Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract Let $m \geq 2$ be a fixed integer, n be any positive integer. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the asymptotic property of the F. Smarandache function $S_p(m^n)$ as $n \to \infty$, and give a sharper asymptotic formula for $S(m^n)$.

Key words F. Smarandache function, primitive number of power p, asymptotic formula

2000 MSC 11B83