DOI:10.13482/j.issn1001-7011.2012.05.023

关于 F. Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程

范盼红

(西北大学 数学系，西安 710127)

摘　要: 对任意正整数 n，$SL(n)$ 为 Smarandache LCM 函数，$\varphi(n)$ 为欧拉函数，$S(n)$ 为 Smarandache 函数，赵艳琳研究了方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ (k 为任意正整数) 与方程 $SL(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解。利用 $SL(n)$，$\varphi(n)$，$S(n)$ 的性质结合初等方法研究了三类方程 $\varphi(n^k)=S(n)$ $(k\geqslant 2)$，$SL(n^k)=\varphi(n)$ $(k\geqslant 2)$ 与 $SL(n)=\varphi(n^k)$ $(k\geqslant 2)$ 的可解性问题并求出所有正整数解。

关键词: F. Smarandache 函数; Smarandache LCM 函数; 欧拉函数; 正整数解

中图分类号: O156　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1001-7011(2012)05-0626-03

0 引言及结论

对任意正整数 n，著名的 F. Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$，即 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$ [1]。Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k，使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$，这里 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。$\varphi(n)$ 为欧拉函数[2]，它为小于 n 并与 n 互素的正整数的个数。马金萍在文献[3]中给出 $\varphi(n)=S(n)$ 的所有正整数解为 $n=1,8,9,12,18$。赵艳琳在文献[4]中研究了 $\varphi(n)=S(n^k)$ $(k\geqslant 2)$ 与 $SL(n)=\varphi(n)$ 的正整数解。

定理1　方程 $\varphi(n^k)=S(n)$ $(k\geqslant 2)$ 的正整数解如下:

当 $k=2$ 时，有 $n=1$，$n=2$ 两个解;

当 $k\geqslant 3$ 时，仅有 $n=1$ 这个整数解。

定理2　方程 $SL(n^k)=\varphi(n)$ $(k\geqslant 2)$ 仅有 $n=1$ 这个整数解。

定理3　方程 $SL(n)=\varphi(n^k)$ $(k\geqslant 2)$ 的正整数解如下:

当 $k=2$ 时，有 $n=1$，$n=2$ 两个解;

当 $k\geqslant 3$ 时，仅有 $n=1$ 这个整数解。

上述定理的证明要用到下列引理:

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式

引理1[5]　对任意正整数 n，$S(n)=\max\{S(p_i^{\alpha_i})\}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$。特别地，$S(p)=p$。

引理2[6]　如果 p 为一素数，那么 $S(p^k)\leqslant kp$。如果 $k<p$，那么 $S(p^k)=kp$，其中 k 为任意给定的正整数。

引理3[7]　对任意正整数 n，$SL(n)=\max\{p_i^{\alpha_i}\}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$，特别地，$SL(p^\alpha)=p^\alpha$。

1 定理的证明

定理1的证明

显然 $n=1$ 为其解。

当 $n>1$ 时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$。

当 $k=2$ 时，方程为 $\varphi(n^2)=S(n)$，设 $S(n)=\max\{S(p_i^{\alpha_i})\}$ $(1\leqslant i\leqslant k)=S(p^\alpha)$，则 $\varphi(n^2)=\varphi(p^{2\alpha}\cdot n_1)=$

收稿日期: 2011-06-07

作者简介: 范盼红(1987-)，女，硕士，主要研究方向: 数论，E-mail: f492432621@126.com

引文格式: 范盼红. 关于 F. Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2012，29(5): 626-628.

$p^{2\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，其中 $n_1=\frac{n^2}{p^{2\alpha}}$，分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha=1$，当 $p=2$ 时，则 $S(n)=S(2)=2$，$\varphi(n^2)=2\varphi(n_1)$，所以当且仅当 $2=2\varphi(n_1)$ 时，才有 $S(n)=\varphi(n^2)$，即 $n_1=1$ 时，可得 $n=2$。

当 $p\geqslant3$ 时，则 $S(n)=S(p^\alpha)=S(p)=p$，$\varphi(n^2)=p(p-1)\varphi(n_1)$，由于 $p\geqslant3$，所以 $p-1\geqslant2$，所以 $\varphi(n^2)>S(n)$，此时该方程无解。

2. 如果 $\alpha=2$，当 $p=2$ 时，则 $S(n)=S(2^2)=4$，$\varphi(n^2)=2^3\varphi(n_1)$，显然 $4<2^3\varphi(n_1)$，此时该方程无解。

当 $p\geqslant3$ 时，则 $S(n)=S(p^2)=2p$，$\varphi(n^2)=p^3(p-1)\varphi(n_1)$，显然 $2p<p^3(p-1)\varphi(n_1)$，此时方程无解。

3. 如果 $\alpha\geqslant3$，当 $p=2$ 时，则 $S(n)=S(2^\alpha)<\alpha\cdot2$，$\varphi(n^2)=2^{2\alpha-1}\varphi(n_1)$，由于 $2^{\alpha-2}=(1+1)^{\alpha-2}=1+\alpha-2+\cdots+1>\alpha$，所以 $2^{2\alpha-2}>2^{\alpha-1}>2\alpha$，可见 $\varphi(n^2)>S(n)$，此时方程无解。

当 $p\geqslant3$ 时，则 $S(n)=S(p^\alpha)\leqslant\alpha p$，$\varphi(n^2)=p^{2\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，由 $p^{\alpha-2}>2^{\alpha-2}>\alpha$ 得 $p^{\alpha-1}>\alpha p$，可见 $\varphi(n^2)>S(n)$，此时方程无解。

从上述过程得知 $\varphi(n^2)=S(n)$ 仅有两个解: $n=1$，$n=2$。

当 $k\geqslant3$ 时，设 $\varphi(n^k)=p^{k\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，$S(n)=S(p^\alpha)$，分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha=1$，对任意素数 p，$S(n)=S(p)=p$，$\varphi(n^k)=p^{k-1}(p-1)\varphi(n_1)$，由于 $\varphi(n^k)>S(n)$，此时方程无解。

2. 如果 $\alpha\geqslant2$，对任意素数 p，$S(n)=S(p^\alpha)<\alpha p$，$\varphi(n^k)=p^{k\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，由 $p^{\alpha-1}>\alpha p$ 可得 $\varphi(n^k)>S(n)$，此时方程无解。

从上述过程得知，$\varphi(n^k)=S(n)$ $(k\geqslant3)$ 只有 1 这个正整数解。证毕。

定理 2 的证明

显然 $n=1$ 为其解。

当 $n>1$ 时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$。

当 $k=2$ 时，方程为 $SL(n^2)=\varphi(n)$。设 $SL(n^2)=\max\{p_i^{2\alpha_i}\}=p^{2\alpha}$，$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha=1$，$SL(n^2)=p^2$，$\varphi(n)=(p-1)\varphi(n_1)$，当且仅当 $p^2=(p-1)\varphi(n_1)$ 时，$SL(n^2)=\varphi(n)$，可见 $p=2$，$n_1=5$。所以 $n=2^2\cdot5$。但 $SL(n^2)=5^2\neq p^2$，所以无解。

2. 如果 $\alpha\geqslant2$，$SL(n^2)=p^{2\alpha}$，$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，当且仅当 $p^{2\alpha}=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$ 时，$SL(n^2)=\varphi(n)$，所以 $p=2$，$n_1>p^{\alpha+1}$，所以 $n=2^\alpha\cdot n_1$，但 $SL(n^2)=SL(2^{2\alpha}\cdot n_1^2)$，由于 $n_1^2>(p^{\alpha+1})^2>2^{2\alpha}$，所以 $SL(n^2)=n_1^2\neq2^{2\alpha}$，此时方程无解，可见 $SL(n^2)=\varphi(n)$ 只有解 1。

当 $k\geqslant3$ 时，方程为 $SL(n^k)=\varphi(n)$。设 $SL(n^k)=p^{k\alpha}$，$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha=1$，则 $SL(n^k)=p^k$，$\varphi(n)=(p-1)\varphi(n_1)$，当且仅当 $p^k=(p-1)\varphi(n_1)$ 时，$SL(n^k)=\varphi(n)$，所以 $p=2$，$n_1>2^k$，但 $SL(n^k)=SL(2^k\cdot n_1^k)=n_1^k\neq2^k$，此时方程无解。

2. 如果 $\alpha\geqslant2$，则 $SL(n^k)=p^{k\alpha}$，$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，当且仅当 $p^{k\alpha}=p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$ 时，$SL(n^k)=\varphi(n)$，所以 $p=2$，$n_1>p^{(k-1)\alpha+1}$，所以 $n=2^\alpha\cdot n_1$，由于 $n_1^k>2^{k((k-1)\alpha+k}>2^{k\alpha}$，所以 $SL(n^k)=SL(2^{k\alpha}\cdot n_1^k)=n_1^k\neq2^{k\alpha}$，可见只有 $n=1$ 这个解。证毕。

定理 3 的证明

显然 $n=1$ 为其解。

当 $n>1$ 时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$SL(n)=p^\alpha$。

当 $k=2$ 时，方程为 $SL(n)=\varphi(n^2)$，则 $\varphi(n^2)=p^{2\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，其中 $n_1=\frac{n^2}{p^{2\alpha}}$。分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha=1$，则 $SL(n)=p$，$\varphi(n^2)=p(p-1)\varphi(n_1)$，当且仅当 $p=p(p-1)\varphi(n_1)$ 时才有 $SL(n)=\varphi(n^2)$，所以 $p=2$，$n_1=1$，所以 $n=2$。

2. 如果 $\alpha\geqslant2$，则 $SL(n)=p^\alpha$，$\varphi(n^2)=p^{2\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，显然 $p^\alpha<p^{2\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，所以无正整数解。

从上述过程得知 $SL(n)=\varphi(n^2)$ 仅有两个解: $n=1$，$n=2$。

当 $k \geqslant 3$ 时，方程为 $SL(n) = \varphi(n^k)$，则 $\varphi(n^k) = p^{k\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，其中 $n_1 = \frac{n^k}{p^{k\alpha}}$。分情况讨论如下:

1. 如果 $\alpha = 1$，则 $SL(n) = p$，$\varphi(n^k) = p^{k-1}(p-1)\varphi(n_1)$，显然 $p < p^{k-1}(p-1)\varphi(n_1)$，所以无正整数解。

2. 如果 $\alpha \geqslant 2$，则 $SL(n) = p^\alpha$，$\varphi(n^k) = p^{k\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，显然 $p^\alpha < p^{k\alpha-1}(p-1)\varphi(n_1)$，所以无正整数解。证毕。

参考文献

[1] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报(自然科学版)，2008，38(2)：173 – 176.

[2] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社，2007.

[3] MA Jin – ping. An equation involving the Smarandache function [J]. Journal of Scientia Magna，2005，1(2)：89 – 90.

[4] 赵艳琳. 有关 Smarandache 函数的方程和一类重要序列性质的研究 [D]. 西安: 西北大学，2010: 15 – 21.

[5] 乐茂华. 关于 Smarandache 函数的一个猜想 [J]. 黑龙江大学学报自然科学报，2007，24(5)：687 – 688.

[6] MARK F，PATRICK M. Bounding the Smarandache function [C]. Smarandache notions. Rehoboth，NM: American Research Press，2002: 37 – 42.

[7] LIU Y N，LI L，LIU B L. Smarandache unsolved problems and new progress [M]. Ann Arbor，MI: High American Press，2008.

Three equations involving F. Smarandache function and Euler function

FAN Pan-hong

(Department of Mathematics，Northwest University，Xi' an 710127，China)

Abstract: For any positive integer n，$SL(n)$ is Smarandache LCM function，$\varphi(n)$ is Euler function，$S(n)$ is Smarandache function. Yanlin Zhao studied all positive integer solutions of $\varphi(n) = S(n^k)$ and $SL(n) = \varphi(n)$. The main purpose is to study the solvability of three equations $\varphi(n^k) = S(n)$ $(k \geqslant 2)$，$SL(n^k) = \varphi(n)$ $(k \geqslant 2)$ and $SL(n) = \varphi(n^k)$ $(k \geqslant 2)$ by using the property of $SL(n)$，$\varphi(n)$，$S(n)$ and the elementary method. All positive integer solutions of them are given.

Key words: F. Smarandache function; Smarandache LCM function; Euler function; positive integer solutions

(上接第 625 页)

On the supplementary remaining time variable technique in repairable system

ZHONG Li-nan，YANG Yuan-ping

(College of Science，Yanbian University，Yanji 133002，China)

Abstract: In the traditional repairable system，by supplementary variable technique and constructing vector markov process，establish density evolution equation to draw some of the system reliability. Here，the remaining time is chosen as the supplementary variable to establish the density evolution equation of two-units parallel redundant repairable system with common error，and then obtained the steady-state solution of the system by the method of Laplace-transform. Finally，by comparison analysis of p_0，the relationship between repair rate of the remainder and elapsed one is obtained.

Key words: repairable system; remaining time; supplementary variable technique; steady-state solution